Počkejte do zimy, spadnou

Karel Rauner[1], *Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni*

Ve třetím čísle devátého ročníku Školské fyziky uvádím v článku *Záleží na tom, jak se do toho třískne* fyzikální příklad motivovaný filmovou pohádkou. Je po Vánocích a bylo by škoda nevytěžit další fyzikální úlohu z nejznámější filmové vánoční pohádky – Mrazík. I když se to normálnímu člověku nezdá, v této pohádce je nastíněno hned několik fyzikálních problémů. V článku se věnuji problému klacků, které Ivánek vyhodil tak, aby v zimě spadly. Zároveň je to ukázka možnosti řešení poměrně složité diferenciální rovnice na úrovni střední školy.

„Ten chlap musí mít ukrutnou sílu." Již více než třem generacím jsou známy citáty z ruské pohádky Mrazík. Jistě na toto téma vzniklo mnoho vědeckých prací z oblasti psychologie postav i diváků všeho věku, neméně obsáhlý bude i počet kulturních kritiků, kteří se fenoménem „Mrazík" zabývali. Zanedbává se však fyzikální rozbor některých situací. Tento článek si klade za cíl napravit alespoň částečně toto opomenutí. Kromě toho rehabilitujeme Ivánka a ukážeme, že to zdaleka není takový omezenec, jak by se některým divákům mohlo zdát. Ivánek neměl jen „ukrutnou sílu", byl to matematicko-fyzikální génius. Vyhodit totiž „klacky" tak, aby spadly v určenou dobu, není úplně jednoduché.

Z některých náznaků lze usoudit, že se scéna s vyhozením klacků odehrává někdy v pozdním jaře. Klacky mají spadnout v zimě, budeme proto předpokládat, že mají spadnout přesně za 200 dnů. Pro naše výpočty je vhodné převést tento údaj na sekundy: 17 280 000 sekund.

Kdyby byl Ivánek průměrným absolventem střední školy, mohl by postupovat takto: Klacky je třeba vrhnout svisle vzhůru. Pro rychlost v takového pohybu platí

$$v = v_0 - gt\,, \tag{1}$$

kde v_0 je počáteční rychlost, s jakou je těleso vrženo svisle vzhůru, g je tíhové zrychlení a t je čas od počátku vrhu. Těleso dosáhne největší výšky v čase T, pro který platí

$$T = \frac{v_0}{g}\,. \tag{2}$$

Protože doba pádu je také T, platí pro potřebnou počáteční rychlost

$$v_0 = \frac{\tau}{2}\cdot g\,. \tag{3}$$

V tomto vztahu je $\tau = 2 \cdot T$ požadovaná doba celého vrhu. Po dosazení $\tau = 17\,280\,000$ s, $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ vyjde $v_0 = 86\,400\,000\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Průměrný absolvent střední školy však ví, že vypočítaná rychlost více než tisíckrát překonává třetí kosmickou rychlost a že klacky vržené touto rychlostí by byly jen dalšími vyslanci lidské civilizace k okolním hvězdným soustavám. Bohužel by klacky poměrně brzy předstihly kosmické sondy s mírovým poselstvím a mimozemská civilizace by musela být padlá na hlavu (nebo na to, v čem mají uložený orgán myšlení), aby si toto poselství nevyložila jako hrozbu. Ivánek by tak mohl být příčinou mezihvězdné války.

1 rauner@kmt.zcu.cz

Ivánek měl tedy vysokoškolské vzdělání, protože klacky spadly, a to dokonce ve správnou dobu a na správná místa. Byl si jistě vědom chyby v předchozím výpočtu. Předpokládáme tam totiž homogenní tíhové pole. Ve skutečnosti tíhové zrychlení klesá se vzdáleností od Země. K přesnějšímu výpočtu proto potřebujeme gravitační zákon, podle kterého je síla F působící na těleso hmotnosti m ve vzdálenosti r od středu Země

$$F = \varkappa \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}, \tag{4}$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta a M hmotnost Země. Abychom se zbavili extrémně velkých či malých čísel, zjednodušíme vztah pomocí g_R – tíhového zrychlení na povrchu Země:

$$m \cdot g_R = \varkappa \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}, \tag{5}$$

R je vzdálenost povrchu od středu Země. Pomocí (5) lze vzorec (4) zjednodušit:

$$F = g_R \cdot \frac{m \cdot R^2}{r^2}. \tag{6}$$

Vztah (6) můžeme přepsat na pohybovou rovnici pro závislost vzdálenosti x od zemského povrchu na čase:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = g_R \cdot \frac{R^2}{(R+x)^2}. \tag{7}$$

Tato jednoduchá diferenciální rovnice – jak je tomu ve fyzice často – není analyticky řešitelná v tom smyslu, že nelze vyjádřit funkci $x(t)$. Pro numerické řešení je vhodnější přepsat ji na integrálně diferenciální rovnici pro rychlost v:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g_R \cdot \frac{R^2}{\left(R + \int v \cdot \mathrm{d}t\right)^2} \tag{8}$$

s počáteční podmínkou $v(0) = v_0$. Numerické řešení našeho problému bude poměrně zdlouhavé: budeme řešit rovnici (8) pro vloženou počáteční rychlost tak dlouho, až se znaménko v změní z kladného na záporné. Získaný čas je dobou letu vzhůru a musí být polovinou zvoleného času τ. Hledanou rychlost v_0 nalezneme opakovanou iterací.

Pro větší rychlost výpočtu zvolíme Eulerovu jednokrokovou metodu a rovnici (8) přepíšeme do dvou rekurentních vztahů:

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t} = g_R \cdot \frac{R^2}{(R + x_i)^2}, \qquad x_{i+1} = x_i + v_{i+1} \cdot \Delta t \tag{9}$$

pro $i = 0, 1, 2, \ldots$ Je zřejmé, že Δt je zvolený integrační krok, $x_0 = 0$ m.[2]

Při řešení můžeme očekávat značný problém s volbou integračního kroku. Protože hledaný čas musí být 8 640 000 s, znamená to při volbě integračního kroku $\Delta t = 0{,}01$ s téměř miliardu kroků. To by spolu s iteračním postupem hledání v_0 představovalo velkou časovou zátěž. Zvýšením integračního kroku se sníží přesnost. Řešení pomocí Excelu proto hned zavrhneme. Vhodnějším se ukázal být program, který zohledňuje tu skutečnost, že tíhové zrychlení se v blízkosti Země vlivem velké rychlosti klacků mění poměrně rychle, ve velké vzdálenosti se klacky pohybují tak pomalu, že se tíhové zrychlení mění nepatrně. Program proto ve dvou cyklech zvětšuje integrační krok vždy po 50 000 výpočtech dvakrát. Prvních 10 sekund pohybu klacků se řeší s krokem $\Delta t = 0{,}0002$ s, dalších 20 sekund krokem $\Delta t = 0{,}0004$ s, výpočet končí krokem $\Delta t = 105$ s. I na pomalejším počítači pak výpočet trvá nejvýše několik desítek sekund.

Před výpočtem je třeba nalézt vstupní hodnoty. Předpokládáme, že děj filmu Mrazík se odehrává poblíž Moskvy, volíme proto zeměpisnou šířku 56 stupňů severní šířky a 200 m nadmořské výšky. Pro tyto hodnoty lze podle [1] vypočítat $g_R = 9{,}815\,83\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ a $R = 6\,375\,000$ m. Hodnota R respektuje zploštění Země i nadmořskou výšku.

---

2 Pro řešení na středních školách je možné se vyhnout pojmu diferenciální rovnice. Stačí nahradit ve vztahu (6) sílu z Newtonova zákona součinem hmotnosti a zrychlení: $m \cdot a$. Pak již jen využijeme definice zrychlení $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ a přejdeme k vztahu (9). Nerovnoměrný pohyb se počítá jako velký počet navazujících rovnoměrných pohybů, v každém z dalších úseků se rychlost podle vztahu (9) zmenšuje.

Iterace je poměrně rychlá, když si uvědomíme, že počáteční rychlost musí být velmi blízká druhé kosmické rychlosti. Konkrétní hodnotu druhé kosmické rychlosti můžeme vypočítat z rovnosti kinetické a potenciální energie:

$$v_{II} = \sqrt{2 \cdot g_R \cdot R} = 11\ 187{,}13\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{10}$$

Při vložení $v_0 = 11\ 100\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ však vyjde doba pohybu vzhůru jen 455 000 s. Zpřesnění ale pokračuje poměrně rychle a potřebné hodnoty 8 640 000 s dosáhneme při $v_0 = 11\ 174{,}823\,8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Jen na ukázku citlivosti: při $v_0 = 11\ 174{,}823\ 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, tedy při rychlosti o $0{,}1\ \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$ (miliontina procenta) menší než potřebné, dopadnou klacky o 4 minuty dříve. To by mohlo mít na další osud Ivánka a Nastěnky výrazný vliv. Kontrolou přesnosti může být numericky nalezená 2. kosmická rychlost. Při rychlosti $v_0 = 11\ 187{,}1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ klacky spadnou asi za 40 miliard sekund (více než 1 000 let). Při rychlosti $v_0 = 11\ 187{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ klacky nedopadnou ani za 10^{19} sekund (více než 10^{11} let). Shoda s hodnotou (10) je až neuvěřitelná. Přesto není nalezená rychlost úplně přesná: vzhledem ke konečné hodnotě integračního kroku je doba letu zatížená chybou 100 sekund.

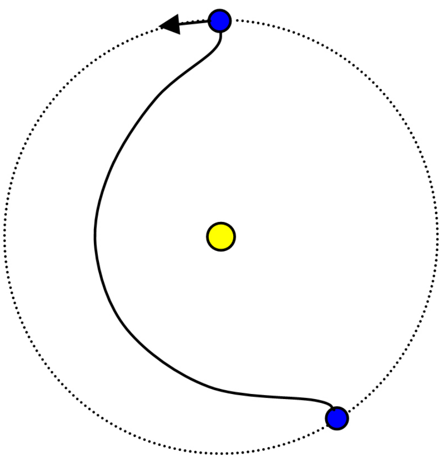
Ivanovy intelektuální, psychomotorické a fyzické schopnosti jsou neuvěřitelné. Bleskově spočítal potřebnou hodnotu $v_0 = 11\ 174{,}823\,8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, dokázal s tak obrovskou přesností klacky vyhodit a prokázal tak i opravdu „ukrutnou sílu“. Zkusme si ji také vypočítat. Předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb klacků na dráze $s = 1$ m. Kombinací známých vztahů pro rovnoměrně zrychlený pohyb dostaneme pro hledané zrychlení

$$a = \frac{v_0^2}{2 \cdot s}, \tag{11}$$

to je přibližně $6{,}2 \cdot 10^7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Pokud má jeden klacek hmotnost 5 kg a Ivan vyhazuje najednou až 4 klacky, má potřebná síla $F = m \cdot a$ skutečně ukrutnou hodnotu 1,2 GN. Pro srovnání: nejmohutnější raketa Saturn V, která vynesla lidi na Měsíc, měla počáteční tah 33,4 MN. Ještě neuvěřitelnější hodnotu získáme při výpočtu výkonu: $7 \cdot 10^{12}$ W. To je výkon odpovídající více než třem tisícům elektráren v Temelíně.

Samozřejmě, že článek je pouhou fyzikálně-matematickou rozcvičkou, situace, kterou jsme řešili, zdaleka neodpovídá skutečnosti. Už jenom to, že klacky by dopadaly rychlostí číselně rovnou v_0 by znamenalo, že loupežníci nebudou koulet očima, ale bleskově se vypaří na dně několikametrového kráteru. Uveďme si nejdříve hlavní příčiny toho, proč jsou výsledky nereálné:

- Země rotuje,
- Země není ve vesmíru sama,
- Země má atmosféru.



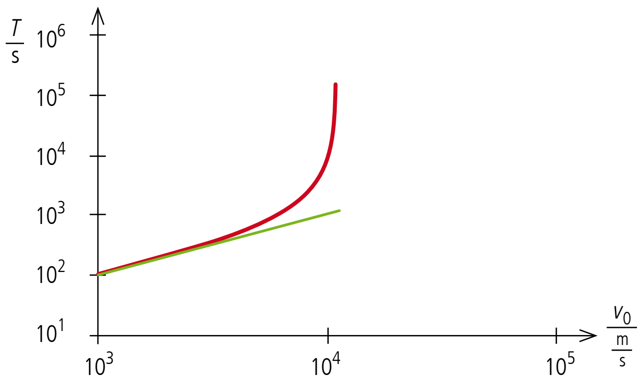
Rotace Země znamená významnou komplikaci ve výpočtech. Při nezahrnutí těchto faktorů by totiž klacky mohly zcela minout Zemi. Do řešení je nutné započítat obě setrvačné síly: odstředivou i Coriolisovu. Kromě přesné počáteční rychlosti je také třeba vypočítat úhel, pod kterým musí klacky vyhodit (již by to nebylo kolmo vzhůru) a směr hodu (odchylka roviny, ve které jsou klacky urychlovány, s poledníkovou rovinou). Vlivem pohybu Země kolem Slunce by skutečná trajektorie klacků byla křivkou podobnou křivce na vedlejším obrázku (vzdálenost trajektorie klacků od trajektorie Země je úmyslně přehnána).

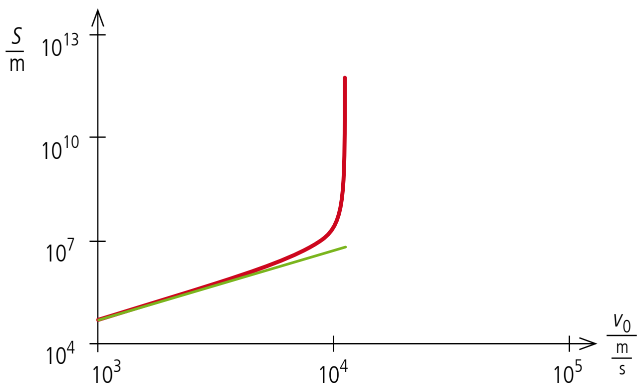
Při výpočtech jsme neuvažovali přítomnost dalších těles ve sluneční soustavě. Protože se při úspěšném hodu dostanou klacky do vzdálenosti 2,88 milionu km od Země, rozhodně nelze zanedbat vliv Měsíce, Slunce i ostatních planet. Ivan by musel proto znát postavení těchto těles v okamžiku hodu.

Nejpodstatnější příčinu nereálnosti celého případu jsem si nechal na konec. Atmosféra Země nejen, že by svým pohybem zásadně ovlivnila trajektorii klacků, ale klacky by kvůli tření ve vzduchu krátce po odhodu shořely. Ona druhá kosmická rychlost je druhá kosmická rychlost.

Co tedy dál? Nic. Mrazík je pohádka a pohádkou zůstává i popsaná epizoda z fyzikálního hlediska. Ostatně takových scén je tam více. Zkuste si třeba vypočítat energii, která by byla zapotřebí ke změně smyslu rotace Země. Tak se totiž dá vysvětlit to, že slunce krátce po východu opět zajde, aby mohla Nastěnka doplést punčochu. Navíc by to znamenalo asi konec lidstva, protože povrch Země by najednou pod námi uháněl rychlostí několika set metrů za sekundu (vzájemný pohyb kůry a zemského jádra by pak zřejmě znamenal návrat Země do počátečních stádií s polotekutým povrchem).

Pro znázornění rozdílu řešení v homogenním poli a pro proměnné tíhové zrychlení jsou připojeny grafy. Na levém obrázku je závislost času letu vzhůru T na počáteční rychlosti v_0, na pravém obrázku je závislost výšky vrhu S. Červenou čarou je řešení v proměnném tíhovém poli, zelená přímka je řešením pro homogenní tíhové pole. Z průběhu grafů je vidět, že se v našem případě – $v_0 = 11\,174{,}823\,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ – pohybujeme v okolí asymptotického průběhu červených křivek. Výsledky jsou proto výrazně závislé i na malé změně počáteční rychlosti.





Poznámka: Každá numerická integrace se vyznačuje určitou chybou. Chybu ve výsledku můžeme očekávat i u použité velmi jednoduché Eulerovy metody, zvláště s proměnným krokem integrace. Kontrolou druhé kosmické rychlosti jsme zatím dokázali, že u vypočítané rychlosti $v_0 = 11\,174{,}823\,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ je chyba menší než $0{,}1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Přesněji můžeme chybu zjistit i pomocí známých analytických vztahů. Řešení diferenciální rovnice (7) analytickými metodami vede k vzorcům pro dobu letu vzhůru a počáteční rychlost:

$$T_a = \frac{\dfrac{\sqrt{R\cdot(S_a - R)}}{S_a} + \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{S_a - R}{R}}}{R\cdot\sqrt{\dfrac{2g_R}{S_a^3}}}, \qquad v_0 = R\cdot\sqrt{2g_R\cdot\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{S_a}\right)}\ . \tag{12}$$

Z druhého vzorce lze pro $v_0 = 11\,174{,}823\,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $R = 6\,375\,000$ m a $g_R = 9{,}815\,83\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ vypočítat $S_a = 2\,890\,110\,469$ m. Z prvního vztahu pak $T_a = 8\,683\,095$ s. Indexy a značí analyticky nalezené veličiny. K požadované době letu $T = 8\,640\,000$ s pak lze například v Excelu vypočítat přesnou potřebnou rychlost: $v_{0a} = 11\,174{,}782\,9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Rozdíl mezi numericky nalezenou a analyticky vypočítanou rychlostí je $v_0 - v_{0a} = 0{,}040\,9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Samozřejmě, že i výpočet v Excelu je zatížen určitou chybou, ta je ale zcela jistě menší než u numerického řešení. Pro zajímavost, druhá kosmická rychlost z uvedených analytických vztahů je $v_{IIa} = 11\,187{,}127\,98\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, tutéž hodnotu dává přesný výpočet podle (10).

Literatura

[1] Brož Jaromír, Roskovec Vladimír,Valouch Miloslav: *Fyzikální a matematické tabulky*. SNTL, Praha 1980.

Zdroje obrázků

http://www.youtube.com/watch?v=FQg7yy7JdPg

http://i113.photobucket.com/albums/n208/xlans/SemSem/WarOfTheWorlds8.jpg

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ef/Apollo_15_Saturn_V_Launch_-_GPN-2000-001115.jpg