Valivý pohyb v soustavě těles (A1)

Miroslav Randa, Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň*

Tento článek je určen studentům řešícím FO v kategorii A. Redakce doporučuje jeho rozmnožení a rozdání studentům.

Pohyb soustavy těles může být komplikován tím, že jedno nebo více těles kromě posuvného pohybu koná ještě pohyb rotační. V takovém případě platí kromě pohybových rovnic pro posuvný pohyb těžiště každého tělesa

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_0 ,$$

kde $\sum \vec{F}$ je výslednice všech sil působících na dané těleso, m jeho hmotnost a $\vec{a}_0$ zrychlení těžiště tělesa, ještě pohybové rovnice rotačního pohybu rotujících těles

$$\sum \vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon} ,$$

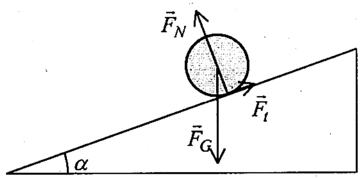
přičemž $\sum \vec{M}$ je výslednice momentů všech sil působících na těleso, J jeho moment setrvačnosti a $\vec{\varepsilon}$ úhlové zrychlení tělesa. Na několika příkladech si ukážeme metody řešení takových úloh. Ve všech úlohách symboly vektorových veličin bez šipek označují velikosti vektorů.

Příklad 1

Určete zrychlení válce, který se kutálí po nakloněné rovině s úhlem α.

Řešení:

Na válec kutálející se po nakloněné rovině působí tíhová síla $\vec{F}_G$, normálová síla podložky (reakce k tíze válce) $\vec{F}_N$ a třecí síla $\vec{F}_t$ (viz obr. 1).



Obr. 1

Pohybovou rovnici pro posuvný pohyb těžiště přepíšeme z vektorového tvaru do složek, přičemž osy zvolíme ve směru pohybu a kolmo ke směru pohybu. Dostaneme tak:

$$F_G \cdot \sin\alpha - F_t = m \cdot a ; \tag{1}$$

$$F_G \cdot \cos\alpha - F_N = 0 . \tag{2}$$

Třetí rovnici pro rotační pohyb válce (v níž r je poloměr válce)

$$F_t \cdot r = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2\right) \cdot \frac{a}{r}$$

dostaneme z pohybové rovnice pro rotační pohyb, přičemž jsme využili toho, že moment setrvačnosti válce $J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$ a mezi zrychlením těžiště a úhlovým zrychlením platí: $a = \varepsilon \cdot r$, tedy vztah obdobný vzorci mezi obvodovou a úhlovou rychlostí.

Protože třetí rovnice po úpravě dává

$$F_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a , \tag{3}$$

můžeme po sečtení rovnic (1) a (3) a malé úpravě vypočíst

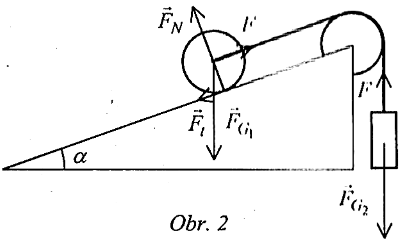
$$a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin\alpha .$$

* randa@iris.pef.zcu.cz

Příklad 2

Přes nehmotnou kladku je přehozeno nehmotné, dokonale neroztažitelné a dokonale ohebné vlákno, na jehož jednom konci je zavěšeno těleso s hmotností m, na druhém konci je připevněna osa válce se stejnou hmotností m. Válec o poloměru r se může pohybovat po nakloněné rovině s úhlem $\alpha = 30°$ (viz obr. 2). Koeficient smykového tření je

a) 0,20;
b) 0,02.



Obr. 2

Určete zrychlení soustavy těles. V tomto i následujících příkladech počítejte s hodnotou tíhového zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení:

Na zavěšené těleso působí pouze dvě síly, tíhová síla $\vec{F}_{G_2}$ a síla vlákna $\vec{F}$. Pohybová rovnice tedy bude:

$$m \cdot g - F = m \cdot a . \tag{4}$$

Sestavíme dále pohybové rovnice pro válec. Pohybové rovnice posuvného pohybu těžiště válce (opět ve směru nakloněné roviny a kolmo k nakloněné rovině) budou mít tvar

$$F - F_t - m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a ; \tag{5}$$

$$m \cdot g \cdot \cos\alpha - F_N = 0 . \tag{6}$$

Bude-li se válec po nakloněné rovině valit, připojíme ještě pohybovou rovnici otáčivého pohybu

$$F_t \cdot r = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2\right) \cdot \frac{a}{r} ,$$

neboli

$$F_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a . \tag{7}$$

Sečtením rovnic (4), (5) a (7) dostaneme vztah

$$m \cdot g \cdot (1 - \sin\alpha) = \frac{5}{2} \cdot m \cdot a ,$$

z něhož snadno dopočteme

$$a = \frac{2}{5} \cdot g \cdot (1 - \sin\alpha) = \frac{1}{5} \cdot g . \tag{8}$$

Musíme však ještě ověřit, zda se válec skutečně valí (a neprokluzuje). Podmínkou pro valivý pohyb je, že třecí síla je menší než maximální třecí síla daná koeficientem tření f, tedy

$$F_t \leq f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha .$$

Z této rovnice po dosazení ze (7) a (8) vyplývá

$$f \geq \frac{1 - \sin\alpha}{5 \cdot \cos\alpha} \doteq 0{,}12 .$$

Válec se tedy bude valit pouze v úloze a), kdy se bude valit se zrychlením $1{,}96\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

V úloze b) se bude válec po nakloněné rovině sunout a třecí sílu určíme za pomoci rovnice (6) a vztahu pro maximální třecí sílu $F_t = f \cdot F_N$. Po sečtení rovnic (4) a (5) dostaneme

$$m \cdot g \cdot (1 - \sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) = 2 \cdot m \cdot a ,$$

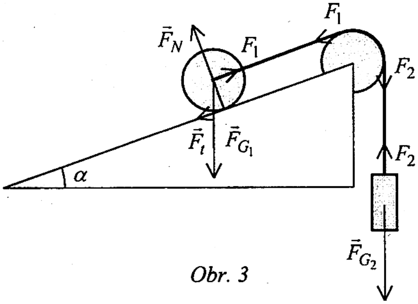
neboli

$$a = \frac{1}{2} \cdot g \cdot (1 - \sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) .$$

Při zadaných hodnotách se soustava pohybuje se zrychlením $2{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Příklad 3

Řešme nyní modifikovaný příklad 2a) (koeficient smykového tření 0,20) za předpokladu, že kladka má tvar válce s poloměrem r a hmotnost stejnou jako obě tělesa z předchozího příkladu. Tření v ose kladky a prokluzování vlákna po obvodu kladky zanedbáváme. Opět hledáme zrychlení soustavy těles.



Obr. 3

Řešení:

V této úloze kromě posuvného pohybu těles z druhého příkladu a otáčivého pohybu válce po nakloněné rovině máme navíc ještě otáčivý pohyb kladky kolem osy. Tím se změní síly vzájemného působení těles prostřednictvím vláken, a tak musíme ve vztazích (4) a (5) velikost síly F nahradit silami F_2, resp. F_1. Pohybová rovnice (7) otáčivého pohybu válce se nezmění, a tak ji můžeme opsat (zároveň ze zadání koeficientu tření ve smyslu úvahy ve druhém příkladu plyne, že se válec valí bez prokluzování):

$$m \cdot g - F_2 = m \cdot a\,; \tag{4a}$$

$$F_1 - F_t - m \cdot g \cdot \sin\alpha = m \cdot a\,; \tag{5a}$$

$$F_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a\,. \tag{7a}$$

Navíc přibude ještě pohybová rovnice kladky

$$(F_2 - F_1) \cdot r = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2\right) \cdot \frac{a}{r},$$

neboli

$$F_2 - F_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a\,. \tag{9}$$

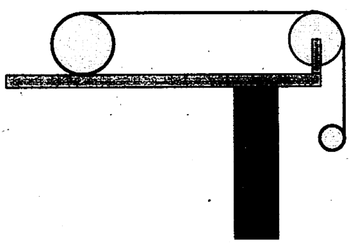
Po sečtení (obligátním) vztahů (4a), (5a), (7a) a (9) a nepatrné úpravě dostaneme pro zrychlení

$$a = \frac{1}{3} \cdot g \cdot (1 - \sin\alpha) = \frac{1}{6} \cdot g\,.$$

Zrychlení soustavy tak vychází přibližně $1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Příklad 4

Na vodorovném, dostatečně drsném stole leží váleček s hmotností m a poloměrem r, na kterém je navinuta velmi tenká, dokonale ohebná a pevná, neroztažitelná nit. Nit je přehozena přes kladku se zanedbatelnou hmotností a navinuta na druhý váleček se stejnou hmotností m a s poloměrem R (viz obr. 4). Tento váleček je v počáteční poloze udržován v klidu. Po uvolnění se oba válečky začnou pohybovat se zrychlením. Určete zrychlení válečků.


Obr. 4

Řešení:

Nejdříve zakreslíme všechny síly působící na válečky (viz obr. 5). Označíme-li zrychlení vlákna na kladce a a zrychlení těžišť válečků a_1 a a_2, budou mezi nimi platit vztahy

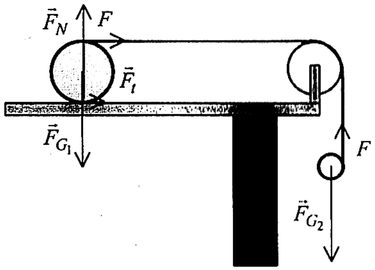
$$a_1 = a - \varepsilon_1 \cdot r\,,$$

$$a_2 = a + \varepsilon_2 \cdot R\,,$$

kde ε_1, ε_2 jsou úhlová zrychlení válečků. Protože pro váleček valící se po stole platí

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}\,,$$

je $$a_1 = \frac{a}{2}\,.$$



Obr. 5

Obdobně pro druhý váleček platí $$\varepsilon_2 = \frac{a_2 - a}{R}\,.$$

Nyní již můžeme sestavit všechny pohybové rovnice:

$$F + F_t = m \cdot a_1\,;$$

$$(F - F_t) \cdot r = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2\right) \cdot \varepsilon_1\,;$$

$$m \cdot g - F = m \cdot a_2\,;$$

$$F \cdot R = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2\right) \cdot \varepsilon_2\,.$$

Po úpravě:

$$F + F_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot a\,; \tag{10}$$

$$F - F_t = \frac{1}{4} \cdot m \cdot a\,; \tag{11}$$

$$m \cdot g - F = m \cdot a_2\,; \tag{12}$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a_2 - a)\,. \tag{13}$$

Sečtením rovnic (10) a (11) snadno zjistíme, že

$$F = \frac{3}{8} \cdot m \cdot a\,. \tag{14}$$

Dosadíme-li nyní (14) do (12), dostaneme

$$a_2 = g - \frac{3}{8} \cdot a \tag{15}$$

a po dosazení (14) a (15) do (13)

$$\frac{3}{8} \cdot m \cdot a = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(g - \frac{3}{8} \cdot a - a\right) \qquad (13)$$

vypočteme $$a = \frac{8}{17} \cdot g\,.$$

Hledaná zrychlení pak jsou

$$a_1 = \frac{4}{17} \cdot g\,;\ a_2 = \frac{14}{17} \cdot g\,.$$