

Pět tisíc sekund v baloně

Karel Rauner^{*}, Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň

„Tak jsem, pánové, onehdy četl zajímavý článek v českém časopisu *Školská fyzika*.¹“

„Snad nechceš říci, Same,“ smál se Dick, „že ses kvůli nějakému časopisu naučil česky?“

„A proč bych se nenaučil? Ty, a dokonce i Joe, byste se měli také nějakou tu cizí řeč naučit a nespolehlat, že dnes umí anglicky všechni na světě.“

„I já? K čemu by mi to bylo, doktore?“ zabručel Joseph Wilson – pro oba své přátele krátce Joe – nad deskou s plošnými spoji.

„I kdyby to bylo jen kvůli tomu,“ pravil Sam, listuje v růžovém sešitku, „aby s mohl číst články ve *Školské fyzice*, stalo by to za to.“

„Nic mi neříkej, vsadím se s tebou o jednu libru, že to byl zase nějaký článek o balonech. Už bys také mohl jednou zapomenout na to, že dědeček tvého pradědečka přeletěl v roce 1862 Afriku,“ řekl Dick a vytahoval z kapsy librovou bankovku.

„A to ani ne celou Afriku,“ zavrčel Joe s páječkou v ruce.

„Že se nestydíte. Samozřejmě, že to byl článek o balonech. A nevím, proč bych měl zapomenout na dědečka svého pradědečka a zároveň svého jmenovce doktora Samuela Fergussona. Vždyť si pořád ještě některí čtenáři rádi počítou ve vylíčení jeho cesty, které jako román zpracoval Jules Verne. Ani vy byste neměli na své předky zapomínat, zvlášť, když jste podědili i jejich jména.“

„Nezapomeň, že můj předek, Richard Kennedy,“ protestoval Dick, „byl k tomu letu takřka donucen, do poslední chvíle nechtěl letět a do balonu vstoupil jen z přátelství k doktorovi. Ten se ale na zneužití přítelovy věrnosti už připravoval dlouho, jen si přečti – když už umíš česky – co mu Fergusson říká měsíc před startem: „Nedosvědčuj ničeho, příteli Dicku; jsi změřen a zvážen, ty, tvůj prach, ručnice i koule; nemluvme tedy již o tom.“²

„Mně taky tu knížku od Vernea moc nepřipomínej,“ odložil konečně svou práci Joe, „můj praprapradědeček tam byl vylíčen jako přítroubly, leč věrný sluha a aby se čtenář dozvěděl, že nebyl jen Joe, ale také měl nějaké příjmení, musí číst knihu opravdu pozorně.“

„No tak už toho nechte,“ pronesl smířlivě Sam, „raději se mne zeptejte, o čem ten článek byl.“

„Nejsdíspis o Breitling Orbiter 3 a jeho letu kolem světa,“ hádal Dick.

„Ale ne, to přece už znám do všech podrobností,“ řekl Sam a se sešitkem přistoupil k přáteleům, „jsou tu uvedeny zajímavé příklady, nejvíce mne zaujala úloha 3. Ta ukazuje, jak vypočítat výšku letu stratosférického balonu. A jestli si pamatuješ, Joe, tvůj praprapradědeček prorokoval, že taková cesta bude příští jejich výpravou.“

„Á, to myslíš tohle: „Víte, přátelé, okusil-li člověk jednou tento druh cestování, nemůže již být bez něho; při příští výpravě nepoletíme ale stranou, nýbrž přímo pořád vzhůru.“³“

„No, vidíš, Joe, jak si taky na tu knihu pamatuješ.“

„Pamatuj si jenom tohle, protože to je snad jediné místo, kde cituje Verne mého předka doslovně, už o několik rádeček dále mu vkládá do úst bláboly o tom, jak poletí balonem k Saturnu, Jupitru i k Neptunu.“

„Tak nám to ukaž a překládej!“ smířlivě řekl Dick a uvolnil Samovi místo u společného stolu.

^{*}rauner@kof.zcu.cz

¹ Mazanec P.: *Let balónu (B5)*. Školská fyzika VI, č. 2 (2000) 72.

² Verne J.: *Pět neděl v baloně*. str. 19, B. Kočí, Praha 1907.

³ Verne J.: *Pět neděl v baloně*. str. 20, B. Kočí, Praha 1907.

„No, dobře,“ řekl Joe po chvíli výkladu, „máme tu vzoreček, který nám umožní vypočítat výšku, do které se balon dostane. Ale jak dlouho se tam letí? Kdyby tam někdo letěl, má vzít s sebou jako naši předkové pemikan, suchary, čaj, kávu a kořalku? Chápu, že by asi nepotřeboval pušku a stan, ale pokrývky⁴, ty bych si asi vzal, v minus šedesáti stupních Celsia to není nic přijemného.“

„Čas výstupu ani průběh rychlosti během letu se nedá tak snadno vypočítat,“ odpověděl Sam, „ale můžeme si sestavit pohybovou rovnici, z té pak můžeme zjistit všechno.“

„Tak co koukáš, sestavuj,“ radí Dick a strká Samovi do ruky papír a tužku, „ode mne toho moc nečekej, víš, že jsem vzdělaný spíše v humanitních vědách.“

„Není to zase tak složité, na levou stranu si napíšeme součin hmotnosti celého balonu a vertikálního zrychlení, které je druhou časovou derivací výšky nad zemským povrchem,“ říká Sam a píše: $m \cdot \ddot{h}$, „na pravou pak dáme součet všech sil, které na balon působí.“

„Ha, ty vidím v tom tvém časopisu na obrázku v předchozí úloze,“ ukazuje radostně Joe na stranu 74, „a nemusím ani umět česky, abych pochopil, že \bar{F}_G je tíhová síla, \bar{F}_V je vztlaková síla a \bar{F}_o je síla odporu vzduchu. Ted už stačí všechny síly vyjádřit pomocí výšky nebo její derivace a máme vlastně hotovo. Řešit diferenciální rovnici není už dnes žádný problém.“

„Je to tak, Joe, vztlakovou sílu si můžeme podle Archimédova zákona napsat jako $F_V = V \cdot \rho_l \cdot g$, kde V je objem balonu, ρ_l je hustota vzduchu a g je tíhové zrychlení.“

„Tak to je výborné,“ jásá Dick, tady žádné h není, „to se nám to bude řešit.“

„Neraduj se předčasně, Dicku, přísně vzato na výšce závisí všechni součinitelé v tomto výrazu. My ale budeme závislost tíhového zrychlení pro malé výšky (do 30 km) zanedbávat a objem balonu budeme předpokládat konstantní, jak to ostatně tady píše i autor úlohy. Hustota vzduchu však na výšce závisí velmi výrazně. Kombinací stavové rovnice a barometrické rovnice dostaneme,

$$\rho_l = \frac{p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H} \cdot M_m}}{R_m \cdot T}, \quad (1)$$

kde p_0 je atmosférický tlak v nulové výšce ($p_0 = 1020$ hPa), $H = 7,2$ km, molární hmotnost vzduchu $M_m = 29$ g · mol⁻¹, molární plynová konstanta $R_m = 8,31$ J · mol⁻¹ · K⁻¹ a T je termodynamická teplota.“

„Tak tady máš to h , Dicku,“ ťuká prstem do papíru Joe, „a dokonce v exponenciální funkci, to se při řešení bez mého počítače neobejdete. No a ještě tuhle vidím tu tíhovou sílu,“ ukažuje opět na stranu 74, kde je napsáno:

$$F_o = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho_l \cdot S \cdot v^2. \quad (2)$$

„Tady ale skutečně žádné h není.“

„Dicku, prosím tě, mlč,“ naoko se rozčíluje Joe, „jednak tu máš zase tu hustotu vzduchu ze vztahu (1), jednak musíš uvážit, že v je rychlosť stoupání, pro kterou platí: $v = \dot{h}$. A abych předešel dalším tvým dotazům, tak S je plošný obsah prášku balonu ve směru pohybu a C je součinitel odporu vzduchu, který je pro kouli roven 0,48.“

„Dobře, já už mlčím, ale nemohli byste mi říct ten tlak v librách na čtvereční palec?“

„Dicku, opravdu, mlč už a počkej si na výsledky; když už to nedokážeš sledovat jako Joe, čti si zatím třeba tuhle knihu o Tibetu.“

Když se Dick usadil s knihou pod lampu v rohu pokoje, napsal Sam výslednou diferenciální rovnici:

⁴ zde naráží Joe na seznam, který je uveden na str. 33 (Verne J.: Pět neděl v baloně. Mladá fronta, Praha 1958.).

$$m \cdot \ddot{h} = V \cdot \frac{p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}} \cdot M_m}{R_m \cdot T} \cdot g - m \cdot g - \frac{C \cdot S}{2} \cdot \frac{p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}} \cdot M_m}{R_m \cdot T} \cdot (\dot{h})^2. \quad (3)$$

„Tak, teď dosadíme ze zadání příkladu: $m = 5 \text{ kg}$, $V = 50 \text{ m}^3$, $T = 213 \text{ K}$, za tíhové zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a plošný obsah si vypočítáme z objemu za předpokladu, že balon má tvar koule: $S = \frac{3}{4} \sqrt{\left(\frac{3 \cdot V}{4}\right)^2 \cdot \pi}$. No a teď se pokusíme tu diferenciální rovnici řešit... Měl jsi pravdu Joe, tady se o analytické řešení nebudu snažit. Vraž to do toho počítače.“

Samuel Fergusson rezignoval na analytické řešení. K numerickému řešení mohl použít některý z univerzálních matematických programů, zvolil však pracnější metodu sestavení programu v Pascalu s využitím numerických metod řešení diferenciálních rovnic. Dalo mu to sice více práce, odměnou mu však byl grafický výstup, který mohl být optimalizován pro řešení této úlohy.

Joe byl šikovný programátor a Sam s Dickem odehráli sotva čtyři šachové partie, když Joe hlásil: „Hotovo, pojďte se na to podívat.“

„Tak, nejdříve vám ukážu číselný výstup. Uvidíte hodnoty výšky, rychlosti a zrychlení balonu nejprve po každé desetině sekundy, pak po deseti sekundách. Pozor, start.“

„Proklatě,“ zvolal Dick, „o fyzice toho sice moc nevím, ale z hodnoty zrychlení v čase 0,1 s vidím, že bych do toho balonu nevlezl; zrychlení je $89,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, to je skoro devítinásobné přetížení.“

„Uklidni se Dicku.“ smál se Sam, „skutečné zrychlení v gondole by bylo menší, protože start se jednak zmírní protažením závěsných lan, navíc toto zrychlení velmi rychle klesá. Podívej se, už v čase 0,5 s je zanedbatelné a v čase 0,6 s je dokonce již velmi malé a záporné. Tak krátké přetížení bys pocítil nejvíce jako cuknutí. A všimni si, to, že zrychlení přechází do záporných hodnot znamená, že jsme už překonali maximální rychlosť: v čase 0,5 s byla $10,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, teď již bude jen klesat. Této maximální rychlosti dosáhl balon již ve výšce málo nad 4 metry.“

„Tak, pánové,“ ukazuje Sam na zastavené řešení, „letíme 60 s, jsme 609 metrů vysoko a rychlosť klesla jen nepatrně: na $10,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.“

„Čas 1 030 s, překonáváme výšku 10 km rychlosťí $9,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, zrychlení – nebo lépe zpoplamení – je stále zanedbatelné: $-0,0019 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,“ hlásí Joe, „a už tu máme maximální výšku: 20,278 km v čase 2 860 s. Rychlosť klesla na nulu.“

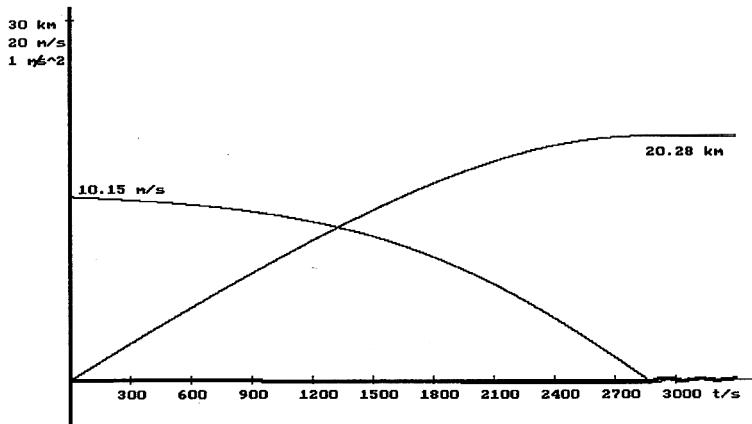
„Ale co je to, vždyť zase padáme,“ volá Dick a ukazuje na klesající výšku.

„Nepadáme, houpáme se,“ odpovídá Sam, „pouze jsme setrvačností při letu vzhůru přeletěli rovnovážnou polohu.“

A skutečně, po 90 sekundách se klesající výška zastavila na 20,268 km a balon začal zase stoupat. Všichni přátelé sledovali, jak se balon ještě houpe se snižující se amplitudou. Ještě v čase 7 000 s od startu kolísala výška balonu v rozmezí 35 cm kolem výšky 20,272 2 km.

„Mohl bys nám to ukázat na grafu, Joe,“ napadá Sama.

„Ale jistě, s tím jsem počítal už při sestavování programu, podívejte se, ale moc se tím nekochejte, protože to je stejně špatně.“



„Jak to, špatně, Joe?“

„Ani ne tak špatně, jako je to nereálné. My jsme počítali s konstantní teplotou -60°C , to by nebylo správně ani na jižním pólu. Skutečnosti se přiblížíme, když do řešení vmontujeme proměnnou teplotu tak, jak to odpovídá naší zeměpisné šířce. To znamená při hladině moře například 20°C , do výšky 12 km klesá rovnoměrně až na -60°C . Tato teplota je pak konstantní až do 23 km, pak teplota opět stoupá s každým kilometrem o 3°C . Vložím to do programu a uvidíme, co to udělá.“

„No, nic moc, je to skoro stejně, jen stoupáme trochu pomaleji: 10 km jsme dosáhli o 10 sekund později a stejně jsme se zpozdili na maximální výšce,“ komentuje průběžně se zobrazující řešení Joe, „to ani nebudu vynášet do grafu; a navíc je to stejně špatně.“

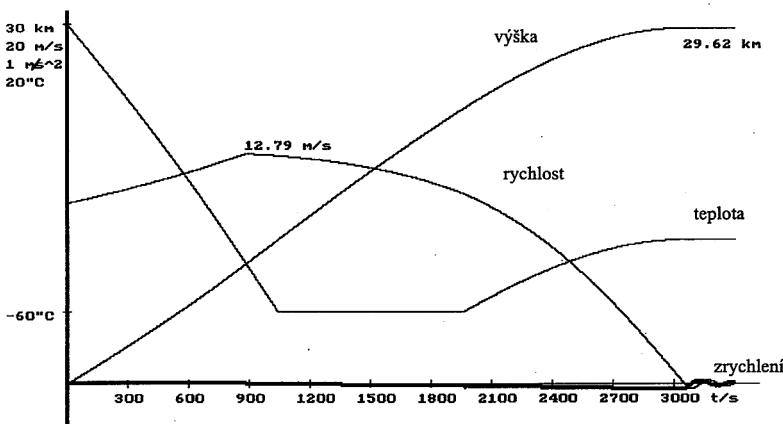
„Co zase máš, mně se to líbí,“ diví se Dick.

„Já vím, co je špatně,“ říká Sam, „už jsi někdy viděl startující stratosférické balony? Jsou poloprázdné, protože počítají se zvětšováním objemu při poklesu tlaku ve větších výškách. Vztlaková síla pak roste a balon se dostane výš. Koneckonců i *Viktorie* startovala před téměř 140 lety poloprázdná, i když tam byl důvod jiný, tam se balon zvětšoval zahříváním vodíku.“

„To mi ani nepřipomínej,“ rozčiluje se Joe, „zahřívat vodíkový balon, to je jako jezdit na bombě a ještě si pod ní topit. Navíc se ten vodík ohříval tráskavou směsí vodíku a kyslíku. Je zázrak, že tady vůbec jsme.“

„Hlavně už nevytahuj tu účinnost, se kterou můj praprapradědeček ohříval vodík,“ ohradil se Sam, „dneska už ví každý školák, že topit spalováním vodíku a kyslíku vyrobených elektrolýzou vody je nehospodárné, že by bylo mnohem výhodnější zahřívat vodík přímo elektrickým proudem. Raději zamontuj do programu proměnný objem a spusť to. Navrhoji plášť balonu s objemem čtyřnásobným, tj. 200 m^3 a na startu ho naplnit původně zadanými 50 m^3 .“

„No, začátek je skoro stejný,“ komentuje průběh čísel Dick, „ale už vidím první změnu: rychlosť stále stoupá, podívejte, až teď, po 890 sekundách dosáhla maxima: $12,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a zároveň jsme právě překonali výšku 10 km. A teď v čase 1 700 sekund po startu překonáváme 20 km a ještě máme rychlosť $11,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Asi se dostaneme o dost výše. No, už je to tady, po 3 050 sekundách od startu dosáhl balon výšky 29,617 km. A zase to houpání. Ustálená výška je 29,608 km. Dej nám to zase do grafu, Joe, a přidej tam i teplotu.“



„Tak, tady to máte,“ říká Joe a mačká tlačítko, „je tam dobré vidět zlom na průběhu rychlosťi v okamžiku, kdy se balon plně naftoukl.“

Sam se zahleděl do daleka a zeptal se: „A jak by letěla Viktorie? Pokud si dobře vzpomínám, startovní objem měla 1250 m^3 , maximální byl dvojnásobný. Ovšem se startovní hmotností 2 000 kg nemůžeme počítat, pokud nechceme užít ohřívání vodíku. Nemusíme si ovšem brát zbraně, potraviny, přístroj na ohřívání vodíku ani stan a přítež. Gondola by ovšem měla být uzavřená a měli bychom vzít sebou nějaký ten kyslík. Dejme tomu, že startovní hmotnost snížíme na 1 500 kg. Jak to pak bude vypadat?“

Joe vložil údaje a spustil řešení.

„Vidíte, to je start podle mého gusta,“ radoval se Dick, když viděl, že zrychlení při startu bylo zanedbatelné.

Joe ovšem jeho radost potlačil: „Moc se neraduj. Takový start znamená, že moc vysoko nedoletíme.“

A skutečně: po 1 180 sekundách dosáhl balon výšky 5 057 metrů, dosáhl maximálního objemu a jeho rychlosť začala z maximální hodnoty necelých $7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ klesat. Po 1 500 sekundách dosáhl balon maximální výšky 6 184 m.

„Tak to není žádná sláva. Je to sice lepší, než kolik dosáhli naši předkové: 8 000 stop⁵, to je asi 2 440 m, ale spokojen nejsme. Co kdybych letěl sám v odlehčené kabíně a jen s nezbytnostmi?“ zeptal se Sam. „Dejme tomu, že bych tím snížil startovní hmotnost na 1 000 kg.“

„To jsi celý ty, nás bys nechal doma,“ bručí Joe a vkládá údaje do programu. „Tak se podívej, moc slávy by ti to nepřineslo: po 1 120 sekundách se dostanesh do výšky 9 835 metrů a dost. Marná sláva, v dnešní době se s balonem, který je zhotoven z lyonského křížového taftu,

⁵ str. 149 (Verne J.: Pět neděl v baloně, Mladá fronta, Praha 1958)

napuštěného gutaperčou, nic moc nedosáhne. Ted' budeme startovat všichni, ale vyměníme balon, který bude inspirován tou úlohou v českém časopisu: vzhledem k tomu, že chceme užitečnou hmotnost asi 1 500 kg, navrhoji počáteční objem 20 000 m³ a možnost jeho zvýšení až na pětinásobek. S vodíkem bude celková hmotnost asi 3 200 kg“

„Není to moc velký objem, Joe?“ pochybuje Sam.

„Není, Breitling Orbiter 3 neletěl do tak velkých výšek a měl objem 18 000 m³,“ odpověděl Joe. „A ukážu vám to graficky.“

„Tak tohle je tedy jízda,“ pochvaloval si Sam. „po 390 sekundách máme výšku 12 km, balon se nám zakulatil a naše maximální rychlosť je 35 m·s⁻¹. A ta výška: 28 km po 1 060 sekundách letu. To bych si dal líbit. Ví někdo, kolik je vlastně rekord výšky letu balonů s lidskou posádkou?“

„Já bych si to líbit nedal,“ protestuje Dick. „Vždyť jste jako ti blázni z jiné verneovky, kteří se nechali dělem vystřelit na Měsíc a vůbec nepřemýšlali, jak se dostanou zpátky.“

„Vypustíme něco plynu, tak se výšky dělá,“ odpověděl Joe.

„A kolik je ‚něco‘?“

Sam chvíli počítal a pak řekl: „Podle mého bychom měli nahoru vypustit tolik plynu, aby v nulové výšce byl balon v rovnováze, to znamená nulovou hodnotu pravé strany rovnice (3) při nulové rychlosti. Z toho vyplývá, že bychom měli v té maximální výšce snížit objem vodíku na 5 639 m³, vypustíme proto téměř celý balon – přes 94 % jeho objemu.“

„Tak do toho už bych vůbec nevlezl,“ protestuje Dick. „To se dole rozbitíme na padři, dej to do toho programu, Joe.“

„Tak se pojďte podívat, už to spouštím,“ lákal Joe od šachů oba kamarády.

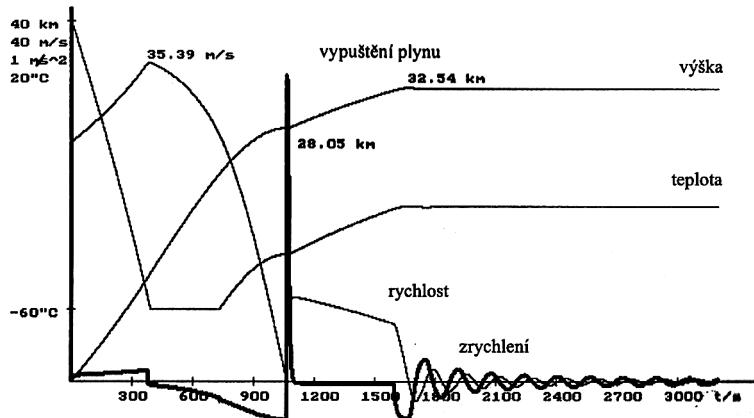
„Padáme?“ ptá se Sam.

„Naopak, stoupáme,“ ukazuje Joe na běžící čísla.

„Ale jak je to možné, tolik vodíku jsme vypustili,“ diví se Sam.

„Že mi to nedošlo hned, vždyť jsme vlastně odhodili zátež, kterou pro nás tvoří v plně naefuknuteém obalu vodík se zbytečně velkým tlakem. Celková hmotnost balonu klesla na...“ Sam chvíli počítal, „na 1 619 kg.“

„Tady to máte i v grafu, maximální výška je 32 543 metrů po 1 670 sekundách,“ ukazuje Joe.



„A jak se tedy dostaneme dolů?“

„Nedá se nic dělat, Dicku, vypustíme toho trochu více.“

„Tak kolik myslíš, Same, že mám do programu vložit?“

„Zkusíme snížit objem na $5\ 000\ m^3$ místo $5\ 639\ m^3$. Zbude nám tak jen 94 kg vodíku.“

Joe spustil řešení s novým návrhem. Balon sice začal klesat, rychlosť poklesu se však z hodnoty $57\ m\cdot s^{-1}$ snížovala a balon se zastavil ve výšce 25,6 km.

„Vidíte, vidíte, není to tak jednoduché, dostat se dolů,“ ukazuje Dick, „já jsem vám to říkal.“

„Nedá se nic dělat, Joe, zkus tam dát objem snížený na $4\ 500\ m^3$, zbude nám tedy už jen 75 kg vodíku a celková hmotnost balonu poklesne na 1 575 kg.“

„Tak to vidíš, Dicku, už klesáme vytvrale. A rychlosť poklesu se po počáteční hodnoty $12\ m\cdot s^{-1}$ dokonce snížuje, podívej, teď ve výšce 12 km je už jen $5\ m\cdot s^{-1}$.“

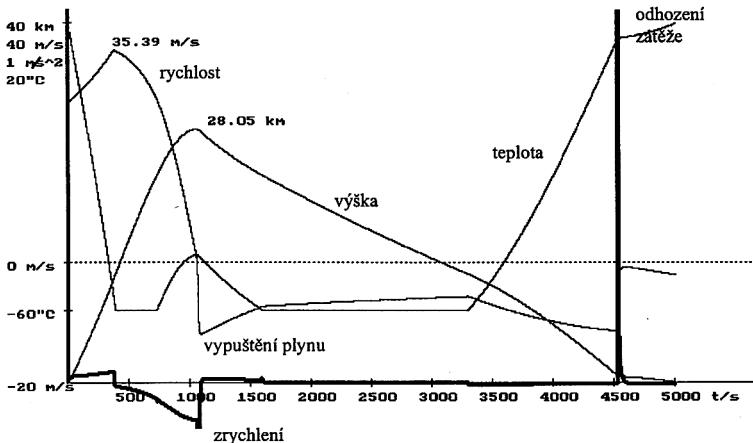
„Jen mě neutěší, Joe, podívej, rychlosť už zase roste a na zem se sice dostáváme v čase 4 590 sekund po startu, ale rychlosť $11,5\ m\cdot s^{-1}$. Nemůžu si pomoci, já bych do takového balonu nevlezl.“

„Nedá se nic dělat, Joe,“ říká Sam, „budeme muset v určité výšce balonu odlehčit.“

„Tak to ne,“ protestuje Joe, „už zase by se po mě chtělo, abych zachraňoval výpravu tím, že vyskočím jako můj předeek do Čadského jezera. Možná, že byste mi dokonce dali padák, co?“

„Nikdo to po tobě nechce, a kdoví, zda by to stačilo. Zkus vložit do programu odhození záteže v nějaké malé výšce, tam se už můžeme zbavit vzduchotěsného obalu gondoly. No a my s Dickem zatím dohrajeme tu partii.“

Po chvíli oznamuje Joe: „Tak pánové, mám to, je třeba odhodit 500 kg ve výšce 700 metrů. Pak přistaneme rychlostí $2\ m\cdot s^{-1}$ po 5 000 sekundách od startu. Tady to máte v grafu. Je třeba dodat, že jsem mohl zařídit ještě hladší přistání, ale trošku mne motivoval ten čas přistání. Třeba by někdo mohl napsat o tom našem letu článek, který by se mohl jmenovat „ $5\ 000$ sekund v baloně“.“



Poznámka: Zmiňovaný program bude v inovované verzi k dispozici na webové stránce http://www.pef.zcu.cz/pef/kof/w_prog.htm.