Grafické vyjádření pohybu rovnoměrně zrychleného

Petr Špína, ZŠ Hradec Králové, tř. SNP

Středoškolská fyzika obsahuje řadu vzorců, jejichž osvojení je podmínkou dalšího studia předmětu. Odvození těchto vztahů však nebývá požadováno, neboť chybí potřebný matematický aparát, zejména znalost integrálního a diferenciálního počtu. Protože zařazení zmíněných partií matematiky do prvních ročníků středních škol není možné a pouhé memorování vzorců neodpovídá moderním trendům výuky fyziky, je třeba hledat co nejnázornější postupy, které užívají studentům již známých pojmů a poznatků. Následující odvození vzorce pro výpočet dráhy pohybu rovnoměrně zrychleného (dále RZ) je příkladem právě takové metody.

Závislost rychlosti v pohybu RZ na čase t je dána rovností $v=v(t)=a\cdot t+v_0$, kde a je zrychlení neměnné v čase a v_0 počáteční rychlost, tj. $a\neq a(t)$, $a=konst.$ a $v_0=v(t=0)$. Grafem závislosti $v=v(t)$ je přímka se směrnicí a, pro hodnotu $v_0=0$ pak přímá úměrnost s konstantou úměrnosti a. Pro stanovení závislosti dráhy pohybu s na čase užíváme obvykle integrálního počtu, když vyjdeme z elementárního posunutí $\mathrm{d}s=\mathrm{d}s(t)=v(t)\cdot\mathrm{d}t$ a po dosazení za $v(t)$ $\mathrm{d}s=a\cdot\int t\cdot\mathrm{d}t+v_0\cdot\int\mathrm{d}t$.

Integrujeme na časovém intervalu od 0 do t:

$$s=a\cdot\int_0^t t\cdot\mathrm{d}t+v_0\cdot\int_0^t\mathrm{d}t$$

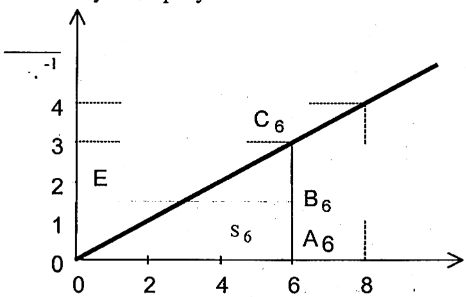
a po integraci

$$s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2+v_0\cdot t+s_0,$$

kde integrační konstanta s_0 má význam počáteční dráhy $s_0=s(t=0)$. Pokud pro jednoduchost volíme $s_0=0$, $v_0=0$, získáme výslednou rovnici $s=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$.

Je zřejmé, že uvedený postup vyžaduje alespoň základní znalost integrálního počtu, takže je studentům formálně nepřístupný. Pokusme se nyní nalézt názornější postup založený na analogii mezi fyzikálními a matematickými pojmy a veličinami.

Mějme následující modelovou situaci: těleso koná pohyb RZ s charakteristikami $s_0=0\,\mathrm{m}$, $v_0=0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $a=0{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Rychlost pohybu roste lineárně v čase od 0 s do 8 s podle obr. 1.

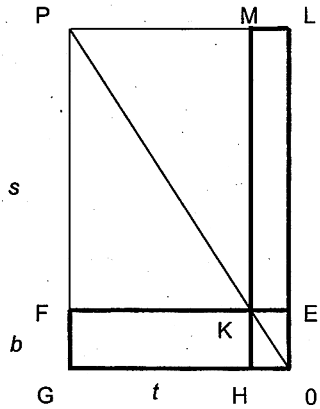


obr. 1

Připomeňme nyní, že obsah plochy pod grafem funkce $f(t)$ omezené na časovém intervalu $(a;b)$ je roven Riemannovu integrálu $\int_a^b f(t)\cdot \mathrm{d}t$ a má tedy význam dráhy s uražené za čas t. Obsah trojúhelníka $0A_6C_6$ (označený S_6) je pak číselně roven dráze pohybu s_6 v čase $t = 6\,\mathrm{s}$:

$$S(0A_6C_6) = S_6 = \int_0^6 v(t)\cdot \mathrm{d}t = s(t = 6\,\mathrm{s}) = s_6 .$$

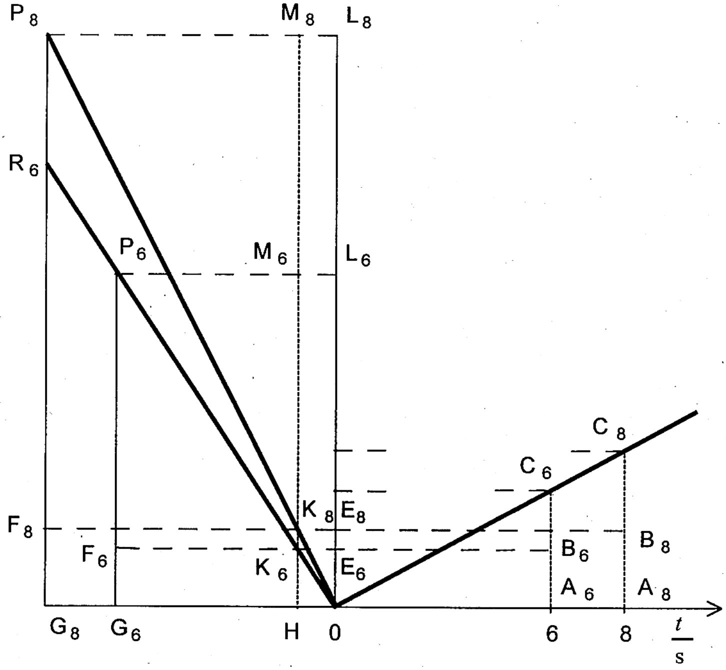
Vyjádřeme teď hodnotu s_6 pomocí úsečky. Nejprve převedeme trojúhelník $0A_6C_6$ na obdélník stejného obsahu $0A_6B_6E_6$ pomocí jeho střední příčky podle obr. 1. Tento obdélník je shodný s obdélníkem $0GFE$ na obr. 2, takže pro jeho obsah platí $S(0GFE) = t\cdot b = S_6$. Nyní hledejme obdélník stejného obsahu s jednotkovou délkou základny. Jeho výška s je pak číselně rovna jeho obsahu, neboť platí $S_6 = 1\cdot s$, takže číselně $s = S_6 = s_6$ – výška s vyjadřuje velikost dráhy uražené v čase $t = 6\,\mathrm{s}$.



obr. 2

Při konstrukci obdélníka $0HML$ s jednotkovou základnou použijeme postup podle obr. 2. Nejdříve sestrojíme bod H tak, aby $|0H| = 1$, pak vztyčíme kolmici na $0G$ z bodu H a najdeme její průsečík K s úsečkou EF. Narýsujeme polopřímku $0K$ a nalezneme průsečík P polopřímek $0K$ a GF. Tím získáme obdélník $0GPL$. Protože obdélníky vytvořené úhlopříčkou jsou po dvou shodné, jsou si obsahy $S(0GFE)$ a $S(0HML)$ rovny.

Nyní sestrojme podle obr. 3 graf závislosti $v = v(t)$ a patřičné trojúhelníky $0A_iC_i$ pro čas $t_i = i\,\mathrm{s}$ (když $i = 6$, resp. 8), k nim pak příslušné obdélníky $0A_iB_iE_i$. Ty přeneseme doprava v osové souměrnosti s osou v, takže vzniknou obdélníky $0G_iF_iE_i$. Poté už snadno zkonstruujeme obdélníky $0HM_iL_i$ o jednotkové základně $0H$. Výška $0L_i$ má délku shodnou s velikostí dráhy s_i uražené v čase t_i (přičemž čas je vyjádřen vzdáleností $|0G_i| = |0A_i|$). Bod P_i má tedy souřadnice $[t_i; s_i]$ a je bodem grafu funkce $s = s(t)$.



obr. 3

Konstrukci bodů P_i velmi zjednoduší, když rozdělíme časový interval na vhodný počet dílů (zde 8) a na stejný počet částí rozdělíme úsečku G_8P_8, takže vzniknou body R_1 až R_8 (pro přehlednost je vyznačen pouze bod R_6 a bod R_8, totožný s bodem P_8). Body P_i získáme snadno jako průsečíky kolmic na $0G_8$ vedených body G_i se spojnicemi $0R_i$ podle obr. 4. Opět pro přehlednost vypouštíme popis bodů P_i, R_i a G_i.

Správnost tohoto postupu doložme následující úvahou: hledáme vztah mezi drahami uraženými v časech t_i, t_j (přičemž t_j je mez časového intervalu, zde $t_j = 8\ \mathrm{s}$). Položme

$$t_j = k \cdot t_i$$

a protože $$s_i = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_i^2,$$

platí $$s_j = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_j^2$$

a po dosazení $$s_j = \frac{1}{2} \cdot a \cdot k^2 \cdot t_i^2,$$

tedy $$s_j = k^2 \cdot s_i,$$

což vyjadřuje podle obr. 4 vpravo, že poměr obsahů trojúhelníků s koeficientem podobnosti k je k^2.

Pro obr. 4 vpravo platí $$|0G_j| = k \cdot |0G_i|$$

a $$|G_jR_j| = k \cdot |G_jR_i|.$$

Protože trojúhelníky $0GP$, $0GR$ jsou trojúhelníky podobné (s koeficientem podobnosti k), píšeme

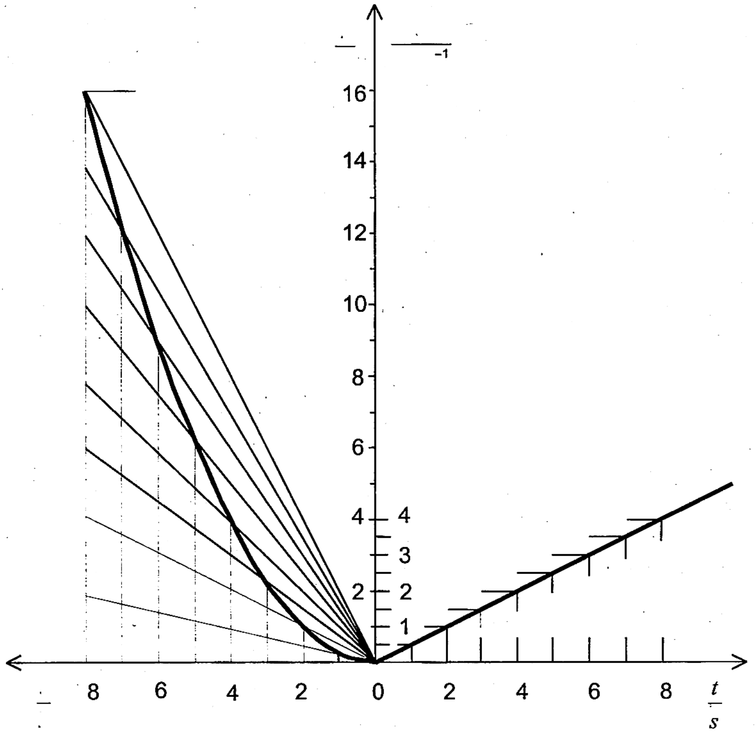
$$|G_jR_i| = k \cdot |G_iP_i|,$$

takže

$$|G_jR_j| = k^2 \cdot |G_iP_i|$$

a tím také

$$|G_jR_j| = k^2 \cdot |G_iR_i|.$$



obr. 4

Poměr délek $|G_iP_i|$ a $|G_jP_j|$, vyjadřujících dráhy s_i, s_j, je tedy k^2 stejně jako u výše uvedeného algebraického porovnání. Body $P_i[t_i; s_i]$ a $P_j[t_j; s_j]$ jsou tedy body grafu funkce $s = s(t)$ a geometrický výsledek je ekvivalentní výsledku získanému výpočtem. Grafem závislosti $s = s(t)$ je parabola proložená body P_1 až P_8.

Metoda popsaná výše pracuje s fyzikálně geometrickými analogiemi, které umožňují studentům postihnout vzájemné vztahy daných veličin. Je zaměřena na hlubší pochopení dané závislosti, pomáhá v upevňování geometrických dovedností a vědomostí, posiluje mezipředmětové vazby a rozvíjí komplexní myšlení. Díky své názornosti je vhodná i pro studenty 1. ročníku gymnázií nebo žáky matematicko-fyzikálních kroužků 9. ročníku ZŠ.