Vrh koulí

Karel Rauner, Západočeská univerzita v Plzni*

Tento článek je určen studentům řešícím FO v kategorii A. Redakce doporučuje jeho rozmnožení a rozdání studentům.

Možná, že jste si při přenosech atletických soutěží všimli, že sportovci při vrhu koulí nevypouštějí kouli pod úhlem $45°$. Máte přitom ze školské fyziky zafixován fakt, že maximální délky dosahuje šikmý vrh vzhůru právě při tomto úhlu. Ve školách se však neřeší případ, ke kterému dochází při vrhu koulí – počátek a konec dráhy není ve stejné výšce. Tento speciální případ si vyšetříme v následujícím příkladu.

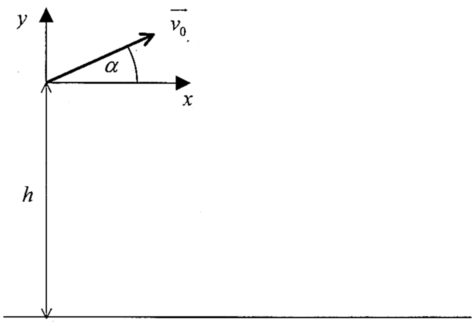
Příklad

Při vrhu koulí je sportovec schopen udělit kouli rychlost v_0 ve výšce h.

a) Pod jakým úhlem α_0 musí kouli vypustit, aby délka vrhu L byla maximální?

b) Pro $h = 2$ m zvolte délku vrhu mezi 20 m a 22 m a pro tuto vzdálenost určete v_0 při optimálním úhlu α_0.

c) V jaké délce B bude při tomto vrhu poškozen trávník po dopadu koule s poloměrem $R = 6$ cm za předpokladu, že se koule zcela zaboří pod povrch trávníku?



Obr. 1

Řešení

Po zavedení souřadné soustavy podle obrázku 1 můžeme pro časovou závislost souřadnic koule, kterou budeme považovat za hmotný bod, psát:

$$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha\,, \tag{1}$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2\,, \tag{2}$$

kde t je čas od vypuštění koule a g je tíhové zrychlení. Úhel mezi vektorem okamžité rychlosti a vodorovnou rovinou je orientovaný, z počáteční kladné hodnoty α se postupně snižuje a po kulminaci vrhu je záporný. Označíme-li celkovou dobu letu koule T, můžeme rovnice (1), (2) přepsat pro místo dopadu:

$$L = v_0 \cdot T \cdot \cos\alpha\,, \tag{3}$$

* rauner@kof.zcu.cz

$$-h = v_0 \cdot T \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot T^2 . \qquad (4)$$

Vyjádříme-li z rovnice (3) dobu letu a dosadíme ji do (4), dostáváme kvadratickou rovnici pro L:

$$L^2 \cdot \frac{g}{2 \cdot v_0^2} - L \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - h \cdot \cos^2\alpha = 0 , \qquad (5)$$

jejíž jediné smysluplné řešení je:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos\alpha \cdot \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}} \right) . \qquad (6)$$

a) Vztah (6) představuje L jako funkci α. Hledaný úhel α_0, při kterém je L maximální, nalezneme z rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\alpha} = 0 . \qquad (7)$$

Po vydělení rovnice konstantami dostaneme (ve vztazích je pro stručnost užit symbol α, teprve ve finálním tvaru je použito správného označení α_0):

$$-\sin\alpha \cdot \left(\sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}} \right) + \cos\alpha \cdot \left(\cos\alpha + \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}}} \right) = 0 ,$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \sin\alpha \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}} + \frac{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}}} = 0 ,$$

$$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}} - \sin\alpha \cdot \left(\sin^2\alpha + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \right) + \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha = 0 ,$$

$$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}} - \sin^2\alpha - \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} + \cos^2\alpha = 0 ,$$

$$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} - \cos 2\alpha ,$$

$$\cos^2 2\alpha \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} \right) = \frac{4 \cdot g^2 \cdot h^2}{v_0^4} - \frac{4 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \cdot \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha ,$$

$$\cos^2 2\alpha \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha} = \frac{4 \cdot g^2 \cdot h^2}{v_0^4} - \frac{4 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \cdot \cos 2\alpha ,$$

$$\cos^2 2\alpha = \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin^2\alpha ,$$

$$\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \right)^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha ,$$

$$\cos^4\alpha - 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha = \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2} \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin^4\alpha ,$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \frac{2\cdot g\cdot h}{v_0^2}\cdot\sin^2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{2\cdot g\cdot h}{v_0^2}\cdot\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{cotg}^2\alpha - 1 = \frac{2\cdot g\cdot h}{v_0^2},$$

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha_0 = \sqrt{1+\frac{2\cdot g\cdot h}{v_0^2}}}. \qquad (8)$$

Uvážíme-li, že ze vztahu (8) lze získat:

$$\frac{v_0}{2\cdot g\cdot h} = \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos 2\cdot\alpha_0},$$

můžeme po dosazení do vztahu (6) získat délku optimálního vrhu

$$L_0 = h\cdot\operatorname{tg}2\cdot\alpha_0. \qquad (9)$$

b) Pro $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ a $h = 2$ m můžeme podle vztahů (8) a (6) doplnit následující tabulku:

$\frac{v_0}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{\alpha_0}{°}$	$\frac{L}{\mathrm{m}}$	$\frac{v_0}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	$\frac{\alpha_0}{°}$	$\frac{L}{\mathrm{m}}$
1	8,9	0,64	9	39,3	9,90
2	16,8	1,33	10	40,2	11,83
3	23,2	2,10	11	40,9	14,00
4	28,1	2,99	12	41,5	16,28
5	31,8	4,03	13	42,0	18,79
6	34,5	5,23	14	42,3	21,51
7	36,6	6,60	15	42,7	24,42
8	38,1	8,16	16	42,9	27,53

Zadání vyhoví $v_0 = 14\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a $\alpha_0 = 42{,}3°$.

c) Pro úhel β, se kterým koule dopadá na trávník, platí:

$$v_x = v_0\cdot\cos\alpha = v_d\cdot\cos\beta, \qquad (10)$$

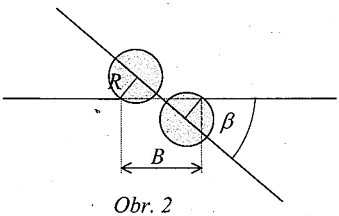
$$v_y = v_0\cdot\sin\alpha - g\cdot T = v_d\cdot\sin\beta \qquad (11)$$

a pro čas letu z (3):

$$T = \frac{L}{v_0\cdot\cos\alpha}. \qquad (12)$$

Pro úhel dopadu lze z rovnic (10)–(12) získat:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g\cdot L}{v_0^2\cdot\cos^2\alpha}. \qquad (13)$$



Obr. 2

Pro zvolené hodnoty je $\beta = -47,7°$. Situaci při dopadu znázorňuje obrázek 2, na kterém je koule ve dvou fázích rozhodujících pro délku poškození trávníku. Z tohoto obrázku je patrné, že

$$B = \frac{2 \cdot R}{\sin|\beta|}. \tag{13}$$

Pro uvedené číselné hodnoty je $B = 16,2$ cm.

Poznámka 1:

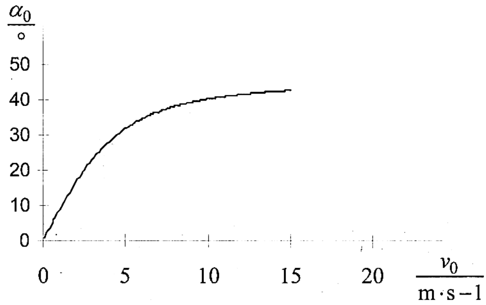
Zajímá-li se někdo blíže o nastíněnou problematiku, může si odvodit následující tvrzení: Vektor rychlosti při maximální délce vrhu musí se spojnicí místa odhodu a místa dopadu svírat úhel $45°$.

Poznámka 2:

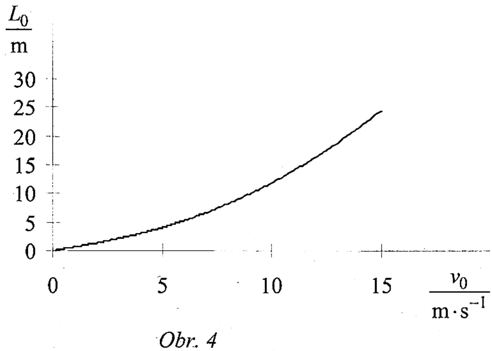
Podle ústního sdělení PaedDr. Tomáše Klobouka, CSc. z katedry tělesné a sportovní výchovy jsou optimální úhly odhozu u špičkových sportovců při zádovém stylu 42°, při rotačním stylu (s otočkou) 40° až 41°. Jsou to hodnoty, které dobře odpovídají odvozeným výsledkům.

Poznámka 3:

Na obr. 3 a obr. 4 jsou grafy závislostí podle vztahů (8) a (9).



Obr. 3



Obr. 4