Paralelní rezonanční obvod

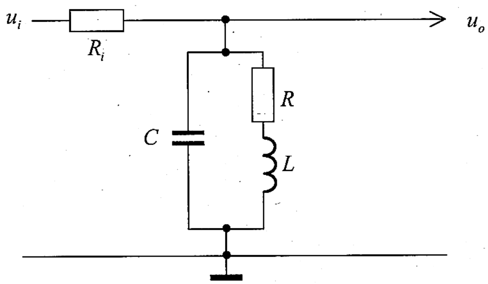
Karel Rauner[*]*, Západočeská univerzita v Plzni*

Tento článek je určen studentům řešícím FO v kategorii A. Redakce doporučuje jeho rozmnožení a rozdání studentům.

Paralelní rezonanční obvody RLC se často užívají ve filtrech typu pásmová propust. V následujícím příkladu si objasníme, proč (na rozdíl od sériového RLC obvodu), jsou odlišné frekvence pro extrém proudu a frekvence rezonanční (při které se obvod chová jako odpor).

Příklad

V signálové cestě spojující zdroj signálu s napětím u_i a vnitřním odporem R_i je zařazen paralelní rezonanční obvod RLC tvořený kondenzátorem o kapacitě C a reálnou cívkou, kterou můžeme nahradit sériovou kombinací ideální cívky s indukčností L a rezistoru o odporu R (obr. 1).



Obr. 1

a) Určete impedanci paralelního rezonančního obvodu.
b) Nalezněte frekvenci, při které proud rezonančním obvodem dosahuje minima.
c) Nalezněte rezonanční frekvenci.
d) Vypočítejte frekvenci, při které je výstupní napětí maximální a uveďte hodnotu tohoto napětí pro $R = 1\,\Omega$, $L = 1$ mH, $C = 1\,\mu$F, $R_i = 1$ kΩ a pro efektivní hodnotu vstupního napětí $U_i = 10$ V. Uveďte i hodnotu rezonanční frekvence.

Řešení

a) Komplexní impedanci paralelního rezonančního obvodu $\boldsymbol{Z}$ lze určit ze vztahu:

$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}} = \frac{1}{R + j\cdot\omega\cdot L} + j\cdot\omega\cdot C, \tag{1}$$

kde j je imaginární jednotka.

Odtud

$$\boldsymbol{Z} = \frac{R + j\cdot\omega\cdot L}{\left(1-\omega^2\cdot L\cdot C\right)^2 + j\cdot\omega\cdot C\cdot R}, \tag{2}$$

[*] rauner@kof.zcu.cz

případně s vyjádřením reálné a imaginární složky

$$\boldsymbol{Z} = \frac{R \cdot \left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right) + \omega^2 \cdot L \cdot C \cdot R}{\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right) + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2} + j \cdot \frac{\omega \cdot L\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right) - \omega \cdot C \cdot R^2}{\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right) + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2} \tag{3}$$

a hledaná reálná impedance

$$Z = \sqrt{|\boldsymbol{Z}|^2} = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}{\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right)^2 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2}}. \tag{4}$$

b) Efektivní hodnotu proudu rezonančním obvodem lze vyjádřit vztahem

$$I = U_o \cdot \sqrt{\frac{\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right)^2 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2}}, \tag{5}$$

kde U_o je efektivní hodnota výstupního napětí obvodu podle obr. 1. Hledání frekvence, při které dosahuje tento proud extrému, předpokládá nalézt kořeny ω_i rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \frac{\left(1-\omega^2 \cdot L \cdot C\right)^2 + \omega^2 \cdot C^2 \cdot R^2}{R^2 + \omega^2 \cdot L^2} = 0. \tag{6}$$

Po úpravách, ze kterých vyplyne triviální řešení $\omega_1 = 0$ (maximum proudu) získáme pro další kořeny kvadratickou rovnici proměnné ω^2:

$$\omega^4 \cdot \left(C^2 \cdot L^4\right) + \omega^2 \cdot \left(2 \cdot C^2 \cdot L^2 \cdot R^2\right) - \left(L^2 + 2 \cdot C \cdot L \cdot R^2 - C^2 \cdot R^4\right) = 0. \tag{7}$$

Její jediné smysluplné řešení je

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{-R^2 + \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(2 \cdot R^2 + \frac{L}{C}\right)}}}{L}, \qquad f_0 = \frac{\sqrt{-R^2 + \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(2 \cdot R^2 + \frac{L}{C}\right)}}}{2 \cdot \pi \cdot L} \tag{8}$$

za předpokladu

$$R^2 < \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \left(2 \cdot R^2 + \frac{L}{C}\right)}. \tag{9}$$

c) Při rezonanční frekvenci musí být fázový posun mezi napětím a proudem nulový, nulová musí být proto i imaginární složka komplexní impedance. Pro rezonanční úhlovou frekvenci tedy platí:

$$\omega_r \cdot L\left(1 - \omega_r^2 \cdot L \cdot C\right) - \omega_r \cdot C \cdot R^2 = 0. \tag{10}$$

Pomineme-li triviální řešení, dostáváme

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{L^2}}, \qquad f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{L^2}} \tag{11}$$

za předpokladu

$$R^2 < \frac{L}{C}. \tag{12}$$

d) Pro zadané hodnotu jsou podmínky (9) i (12) splněny. Ze vztahu (8) je možné vypočítat $f_0 = 5\,032{,}9199\ \mathrm{Hz}$, ze vztahu (11) $f_r = 5\,030{,}4041\ \mathrm{Hz}$. Pro úplnost vypočítáme frekvenci podle Thomsonova vztahu

$$f_T = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}: \qquad (13)$$

$f_T = 5032,9212$ Hz.

Komplexní impedance celého obvodu je

$$\boldsymbol{Z}_c = \boldsymbol{Z} + R_i, \qquad (14)$$

proto při $f_T \cong f_0$ (výpočet je pro f_T jednodušší) je

$$Z_{cT} = \sqrt{\left(R_i + \frac{L}{CR}\right)^2 + \frac{L}{C}}, \qquad (15)$$

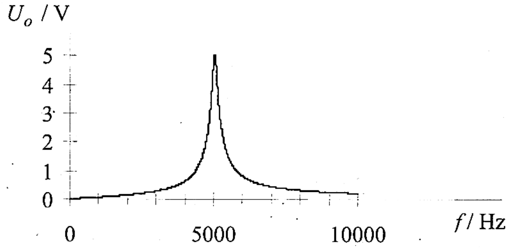
číselně $Z_{cT} = 2000,25\ \Omega$. Proto je maximální napětí na výstupu

$$U_o = U_i \cdot \frac{Z_T}{Z_{cT}} \qquad (16)$$

Protože impedance samotného rezonančního obvodu je při frekvenci f_T : $Z_T = 1000,50\ \Omega$, je číselná hodnota výstupního napětí 5,002 V.

Poznámka 1:

Na obr. 2 je závislost výstupního napětí filtru na frekvenci vstupního napětí.



Obr. 2

Poznámka 2:

Nepatrné rozdíly mezi třemi důležitými frekvencemi se při zvětšujícím se R výrazně zvyšují, jak ukazuje následující tabulka.

R / Ω	f_0 / Hz	f_r / Hz	$f_0 - f_r$ / Hz	$f_T - f_0$ / Hz
0,1	5032,921	5032,896	0,02	-0,00001
1	5032,92	5030,404	2,51	0,0012
2	5032,901	5022,845	10,05	0,020
5	5032,154	4969,612	62,54	0,767
10	5021,446	4774,648	246,76	11,48
20	4883,855	3898,484	985,37	149
30	4425,881	1591,549	2834,33	607