Rádové odhady a približné výpočty v školskej fyzike

Ľubomír Konrád, Žilinská univerzita, Žilina*

Každý z nás musí v živote často niečo odhadovať: ako dlho bude niečo trvať, či nám vystačí benzín na predpokladanú trasu, či nás pri horolezeckej výprave udrží takéto lano atď. Urobiť si v takýchto prípadoch približný, ale kvalifikovaný odhad nám môže napomôcť, aby sme daný problém zvládli bez nepríjemných následkov. Pri práci vedca alebo konštruktéra sú však odhady profesionálnou nevyhnutnosťou, bez ktorej sa nezaobíde. Osvojenie si metódy odhadu spolu s intuíciou je pre výskumníka mimoriadne dôležité pri rozbore a analýze nových myšlienok, s ktorými prichádza do styku pri tvorivej práci.

A práve o rozvoj tvorivosti u našich študentov sa môžeme pokúsiť v rámci vyučovacieho procesu i riešením vhodných a zaujímavých úloh na rádové odhady. Už v minulosti niektorí známi fyzici využívali takéto úlohy pri vyučovaní. Medzi najznámejších z nich patria E. Fermi [1], R. P. Feynman [2], či P. L. Kapica [3]. Niektorí súčasní fyzici (najmä americkí) označujú úlohy tohto typu ako „Fermiho“ úlohy, pretože práve Enrico Fermi bol medzi kolegami známy tým, že vedel takéto úlohy nielen pohotovo formulovať, ale aj rýchlo a efektívne riešiť. V súčasnosti sa nájdu vo svete vysoké školy, ktoré dokonca zadávajú úlohy tohto typu pri prijímacích skúškach na fakulty, na ktorých sa pripravujú budúci vedci či výskumní pracovníci [4]. Myslíme si, že je užitočné, ak takéto úlohy zadáme študentom v rámci fyzikálnych krúžkov alebo fyzikálnych korešpondenčných seminárov, ktoré sú určené práve talentovaným jedincom [5].

Najskôr si povedzme, čo budeme rozumieť pod pojmom rádový odhad veličiny. Dve číselné hodnoty nejakej fyzikálnej veličiny sa líšia o jeden rád, ak ich pomer je približne 10, o dva rády, ak ich pomer je 10^2 atď. Z tohto pohľadu bude číslo 92 rádovo 10^2 krát väčšie ako 1, ale 13 bude rádovo 10krát väčšie ako 1. Ak je pomer dvoch hodnôt 1,4 alebo 2,1, považujeme ich za veličiny rovnakého rádu.

Pri formulácii úloh na rádové odhady nie sú uvedené žiadne (príklady 1–3) alebo takmer žiadne (príklad 4) číselné hodnoty fyzikálnych veličín, ktoré sú nevyhnutné pre vyriešenie úlohy. Predpokladá sa, že každý si ich dokáže sám zvoliť. Prirodzene, že spektrum možných číselných odpovedí je pomerne široké, ale samotný prístup k riešeniu týchto úloh je nezvyčajný a pre žiakov príťažlivý.

Úlohy na odhad predstavujú pre väčšinu žiakov úplne nový typ úlohy. Pri riešení takejto úlohy je nutné pochopiť uvedený fyzikálny jav, vytvoriť jeho jednoduchý fyzikálny model, zvoliť „rozumné“ hodnoty fyzikálnych veličín a získať číselný výsledok, ktorý viac či menej zodpovedá realite.

Najdôležitejšou a zároveň najťažšou etapou riešenia úloh na odhad je fyzikálna podstata úlohy, výber a skonštruovanie najjednoduchšieho fyzikálneho modelu daného javu. Je potrebné správne vybrať fyzikálne parametre, ktoré sú pre úlohu najdôležitejšie a určujú jej fyzikálnu podstatu, a zanedbať tie parametre, ktoré majú malý vplyv na jav, ktorým sa zaoberáme. Aby sme mohli stanoviť základné vzťahy medzi rôznymi parametrami, musíme správne použiť základné fyzikálne zákony a definície. Inokedy sa môžeme obmedziť na veľmi jednoduchú definíciu alebo kvantitatívnu interpretáciu fyzikálnych zákonov.

Úlohy na odhad môžeme rozdeliť na úlohy:

- v ktorých stačí zvoliť vhodné konkrétne hodnoty, lebo fyzikálne je úloha pomerne jednoduchá;
- v ktorých sa vyskytuje veľmi zložitá situácia a získanie odhadu je komplikovanejšie;

* konrad@fpv.utc.sk

– pri ktorých treba použiť ďalšie vhodné prostriedky, napr. rozmerovú analýzu.

Ďalej uvedieme niekoľko konkrétnych príkladov aj s riešeniami.

Príklad 1

Určite ste si všimli, že pri hádzaní s rozbehom dosiahneme podstatne lepší výkon, ako keby sme hádzali z miesta. Odhadnite, o koľko ďalej hodíme športovým granátom, ak ho budeme hádzať s rozbehom.

Riešenie:

Pri hádzaní z miesta je maximálna dĺžka hodu približne

$$d \approx \frac{v_0^{\,2}}{g}$$

(v_0 je počiatočná rýchlosť granátu), odkiaľ $v_0 \approx \sqrt{d \cdot g}$. Pri hádzaní s rozbehom udelíme granátu vo vodorovnom smere doplnkovú rýchlosť v. Vertikálna zložka počiatočnej rýchlosti granátu sa pri rozbehu prakticky nemení, to znamená, že sa nebude meniť ani výška a doba pohybu. Pre čas letu granátu približne platí

$$t \approx \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \sqrt{2} \cdot \frac{v_0}{g}$$

(zvolili sme optimálny elevačný uhol $\alpha = 45^\circ$). Po dosadení za v_0 vychádza

$$t \approx \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g}} \,.$$

Dĺžka hodu sa preto pri rozbehu zväčší o

$$\Delta d = t \cdot v \approx v \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot d}{g}} \,.$$

Ak predpokladáme, že pri rozbehu dosiahneme rýchlosťou $v = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a že pri hádzaní z miesta hodíme $d = 30\ \mathrm{m}$, vychádza $\Delta d \approx 12\ \mathrm{m}$.

Príklad 2

Výsadkár, ktorý vyskočí z lietadla, sa najskôr pohybuje zrýchlene, ale po nejakom čase sa jeho rýchlosť ustáli a pohybuje sa približne rovnomerne. Odhadnite, akou rýchlosťou klesá výsadkár s otvoreným padákom.

Riešenie:

Za čas Δt narazí na padák s obsahom S rýchlosťou v vzduch hmotnosti $\Delta m \approx \rho \cdot v \cdot S \cdot \Delta t$ a udelí mu impulz $\Delta m \cdot v$. Odporová sila je potom

$$F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} \approx S \cdot \rho \cdot v^2 = \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^2 \,,$$

kde r je polomer padáka. Táto sila je pri rovnomernom pohybe padáka v rovnováhe s tiažovou silou

$$\rho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot r^2 \approx m \cdot g \,,$$

odkiaľ pre rýchlosť klesania výsadkára dostávame výraz

$$v \approx \sqrt{\frac{m \cdot g}{\rho \cdot \pi \cdot r^2}} \,.$$

Ak zvolíme hmotnosť padáka aj s výsadkárom $m = 100\ \mathrm{kg}$, polomer padáka $r = 3\ \mathrm{m}$ a hustotu vzduchu $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, dostaneme pre rýchlosť klesania parašutistu odhad $v \approx 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Pozn.:

Túto úlohu sa pokúsime vyriešiť presnejšie: aerodynamická odporová sila, ktorá pôsobí proti pohybu parašutistu, sa počíta podľa vzťahu $F = 0{,}5 \cdot C \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 = 0{,}5 \cdot C \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^2$, kde C je súčiniteľ odporu a pre padák tvaru dutej polgule, ktorej dutina je obrátená proti smeru prúdenia vzduchu, má hodnotu 1,33. Potom dostaneme pre rýchlosť vzťah

$$v \approx \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\mathrm{C} \cdot \rho \cdot \pi \cdot r^2}}$$

a po dosadení hodnotu $v \approx 6{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Príklad 3

Pri veľkých víchriciach dochádza často k porušeniu stavieb, polámaniu stromov a telegrafných stĺpov alebo k prevráteniu áut či dokonca autobusov. Pokúste sa odhadnúť, aká musí byť rýchlosť vetra, aby prevrátil stojaci autobus.

Riešenie:

Nech rozmery autobusu sú: výška $2 \cdot h$, šírka $2 \cdot s$, dĺžka d. Ak hustota vzduchu je ρ a rýchlosť vetra v, tak na bočnú stenu autobusu pôsobí sila

$$F \approx S \cdot \rho \cdot v^2 = 2 \cdot h \cdot d \cdot \rho \cdot v^2,$$

kde $S = 2 \cdot h \cdot d$ je obsah bočnej steny autobusu. Okrem toho pôsobí na autobus tiažová sila. Labilná rovnováha bude dosiahnutá pri rovnosti momentov pôsobiacich síl vzhľadom na os, ktorá je určená dotykovými bodmi predného a zadného kolesa s vozovkou:

$$m \cdot g \cdot s \approx 2 \cdot h^2 \cdot d \cdot \rho \cdot v^2,$$

odkiaľ rýchlosť vetra

$$v \approx \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot s}{2 \cdot h^2 \cdot d \cdot \rho}}.$$

Ak dosadíme hustotu vzduchu $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, hmotnosť autobusu $m = 10\ \mathrm{t}$, rozmery autobusu $h \approx 1{,}5\ \mathrm{m}$, $s \approx 1{,}5\ \mathrm{m}$, $d \approx 20\ \mathrm{m}$, dostaneme odhad $v \approx 36\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 130\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Pozn.:

Náš odhad pomerne presne zodpovedá rýchlostiam vetra počas víchrice, o ktorých sa občas dozvedáme v správach o počasí. Pre zaujímavosť môžeme uviesť, že hurikán Fran, ktorý zasiahol v 90. rokoch 20. storočia pobrežie Severnej Karolíny, sa prihnal rýchlosťou až $190\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a doslova zmietol všetko, čo mu stálo v ceste.

Príklad 4

Pri streľbe zo strelných zbraní sa v hlavni uvoľňujú plyny, ktoré sú pod veľkým tlakom. Odhadnite tlak plynov v hlavni strelnej zbrane, ktorý vznikne pri výstrele. Projektil má pri opustení hlavne rýchlosť približne $800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Riešenie:

Pri výstrele treba uviesť projektil z pokoja do pohybu, to znamená, že mu musíme udeliť kinetickú energiu E_k. Na to sa využije práca tlakových síl plynov v hlavni, ktorú môžeme vyjadriť vzťahom $W = p \cdot S \cdot d$, kde p je tlak plynov v hlavni (pre zjednodušenie predpokladajme, že tlak je počas pohybu náboja v hlavni konštantný), S je obsah prierezu hlavne a d je jej dĺžka. Potom platí

$$W \approx E_k \text{, resp. } p \cdot S \cdot d = \frac{m \cdot v^2}{2},$$

odkiaľ pre tlak plynov v hlavni dostávame

$$p = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot S \cdot d}.$$

Ak zvolíme hmotnosť projektilu $m = 10\ \mathrm{g}$, rýchlosť projektilu pri opustení hlavne $v = 800\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, obsah prierezu hlavne $S = 1\ \mathrm{cm^2}$ a dĺžku hlavne $d = 50\ \mathrm{cm}$, získame odhad $p = 60\ \mathrm{MPa}$.

Na záver ešte niekoľko úloh, nad ktorými sa môžete zamyslieť. V zátvorke sú orientačne uvedené výsledky, ku ktorým sa môžete dopracovať.

- Všetci dobre vieme, že pri pohľade na koľajnice sa nám zdá, že sa niekde v diaľke zbiehajú. Odhadnite, v akej vzdialenosti sa nám javí, že železničné koľajnice sa pretínajú. (1 km)
- Nasleduje úloha, ktorá nám pripomína námet nejakého sci-fi filmu. Odhadnite, ako by sa zmenil atmosferický tlak, ak by sa všetka voda vo svetových oceánoch vyparila. (zvýšil by sa asi o 10^7 Pa)
- Športovci musia na súťažiach podávať niekedy obdivuhodné výkony. Odhadnite, akou silou pôsobí športovec na guľu pri vrhu guľou. (800 N)
- Lietajúci hmyz nás často otravuje nepríjemným bzučaním. Odhadnite frekvenciu zvuku, ktorý generuje letiaci komár. (400 Hz)
- Často si neuvedomujeme, že vzduch okolo nás môže vyvinúť až nepredstaviteľne veľké tlaky. Odhadnite tlak vzduchu v šachte hlbokej 5 km. (dvojnásobok atmosferického tlaku)

Literatúra:

[1] Gintner M., Mojžiš M.: *Záujmový útvar fyziky pre žiakov 3. a 4. roč. SŠ*. SPN, Bratislava 1993.

[2] Fejnmanovskije lekcii po fizike. *Zadači i upražnenija s otvetami i rešenijami*. Mir, Moskva 1961.

[3] Kapica P. L.: *Fizičeskije zadači*. Moskva, Znanije 1972.

[4] Meledin G. V.: *Fizika v zadačach*. Nauka, Moskva 1990.

[5] Konrád Ľ.: *Fyzikálny korešpondenčný seminár ako forma práce s talentami na SŠ*. Zborník z konferencie DIDFYZ 2000, Nitra 2001.