Sprinter

Josef Jírů, Gymnázium Pelhřimov

Při běhu na 100 m se sprinter rozbíhá tak, že od startu určitým způsobem zrychluje a po dosažení konečné rychlosti se pohybuje rovnoměrně až do cíle. Za předpokladu, že konečné rychlosti nabude do vzdálenosti 60 m od startu, bude stejný průběh pohybu i na sprinterské trati 60 m. Tato skutečnost přivádí k myšlence, že ze známých dosažených časů sprintera na uvedených tratích bude možné vypočítat některé další veličiny jeho pohybu. Tímto problémem se zabývaly též 2 úlohy fyzikální olympiády. V úloze FO-40-D-II-1 (ve školním roce 1998/99) byl zrychlený úsek modelován rovnoměrně zrychleným pohybem, ve školním roce 2002/03 v úloze FO-44-A-II-1 pohybem se stálým urychlujícím výkonem sprintera. V obou úlohách byly použity osobní rekordy sprintera Frenkie Fredericka z Namibie dosažené v roce 1991 (60 m za 6,47 s, 100 m za 9,95 s).

Nejprve určíme maximální rychlost. Běžně se jako příklad uvádí, že špičkový sprinter dosahuje rychlosti kolem $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, neboť 100 m uběhne za 10 s. Tato uváděná rychlost je však rychlost průměrná, neboť součástí běhu je i rozbíhání. Maximální rychlost musí proto být větší než $10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Označme $s_1 = 60\ \mathrm{m}$, $s_2 = 100\ \mathrm{m}$, s_0 úsek pro rozbíhání a t_1, t_2, t_0 po řadě odpovídající časy. Pak pro maximální rychlost v_m platí rovnice

$$s_1 - s_0 = v_\mathrm{m} \cdot (t_1 - t_0), \qquad (1)$$

$$s_2 - s_0 = v_\mathrm{m} \cdot (t_2 - t_0). \qquad (2)$$

Jejich odečtením dostaneme

$$v_\mathrm{m} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \qquad (3)$$

Dosazením číselných hodnot dostáváme $v_\mathrm{m} = 11{,}49\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Nyní si všimneme parametrů při rozbíhání sprintera. Při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$s_1 = \frac{1}{2}\cdot v_\mathrm{m}\cdot t_0 + v_\mathrm{m}\cdot(t_1 - t_0) = v_\mathrm{m}\cdot\left(t_1 - \frac{t_0}{2}\right),$$

$$s_2 = \frac{1}{2}\cdot v_\mathrm{m}\cdot t_0 + v_\mathrm{m}\cdot(t_2 - t_0) = v_\mathrm{m}\cdot\left(t_2 - \frac{t_0}{2}\right).$$

Z rovnic lze získat dobu rozbíhání

$$t_0 = \frac{2\cdot(s_2\cdot t_1 - s_1\cdot t_2)}{s_2 - s_1} = 2{,}50\ \mathrm{s},$$

zrychlení

$$a = \frac{v_\mathrm{m}}{t_0} = \frac{(s_2 - s_1)^2}{2\cdot(s_2\cdot t_1 - s_1\cdot t_2)\cdot(t_2 - t_1)} = 4{,}60\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

a dráhu

$$s_0 = \frac{v_\mathrm{m}\cdot t_0}{2} = \frac{s_2\cdot t_1 - s_1\cdot t_2}{t_2 - t_1} = 14{,}37\ \mathrm{m}.$$

Při rozbíhání se stálým výkonem P má sprinter o uváděné hmotnosti $m = 75\ \text{kg}$ v každém okamžiku t okamžitou rychlost v podle rovnice

$$P \cdot t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 , \tag{4}$$

z níž plyne závislost okamžité rychlosti na čase

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}} .$$

Integrací získáme dráhu

$$s_0 = \int_0^{t_0} v \cdot \mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}} \cdot \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{8 \cdot P}{9 \cdot m} \cdot t_0^3} . \tag{5}$$

Dále v souladu s rovnicí (4) platí

$$P \cdot t_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_\mathrm{m}^2 . \tag{6}$$

Vyloučením P a m z rovnic (5) a (6) dostaneme maximální rychlost

$$v_\mathrm{m} = \frac{3 \cdot s_0}{2 \cdot t_0} .$$

Z této rovnice použitím původních rovnic (1) nebo (2) nakonec dostaneme dobu rozbíhání

$$t_0 = 3 \cdot \frac{s_2 \cdot t_1 - s_1 \cdot t_2}{s_2 - s_1} = 3{,}75\ \text{s} \tag{7}$$

a dráhu

$$s_0 = \frac{2 \cdot v_\mathrm{m} \cdot t_0}{3} = 2 \cdot \frac{s_2 \cdot t_1 - s_1 \cdot t_2}{t_2 - t_1} = 28{,}7\ \text{m} .$$

Z rovnic (6), (3) a (7) pak plyne výkon

$$P = \frac{m \cdot v_\mathrm{m}^2}{2 \cdot t_0} = \frac{m \cdot (s_2 - s_1)^3}{6 \cdot (t_2 - t_1)^2 \cdot (s_2 \cdot t_1 - s_1 \cdot t_2)} = 1320\ \text{W} .$$

Pro vzájemné porovnání obou modelů a pro porovnání se skutečným sprintem použijeme závislost okamžité rychlosti na uražené dráze. Z kinematických rovnic pro rovnoměrně zrychlený pohyb plyne

$$v = \sqrt{2 \cdot a} \cdot \sqrt{s} .$$

Pro pohyb se stálým výkonem využijeme rovnici (4) a primitivní funkci získanou integrací rychlosti

$$s = \sqrt{\frac{8 \cdot P}{9 \cdot m} \cdot t^3} .$$

Vyloučením času t získáme hledanou závislost

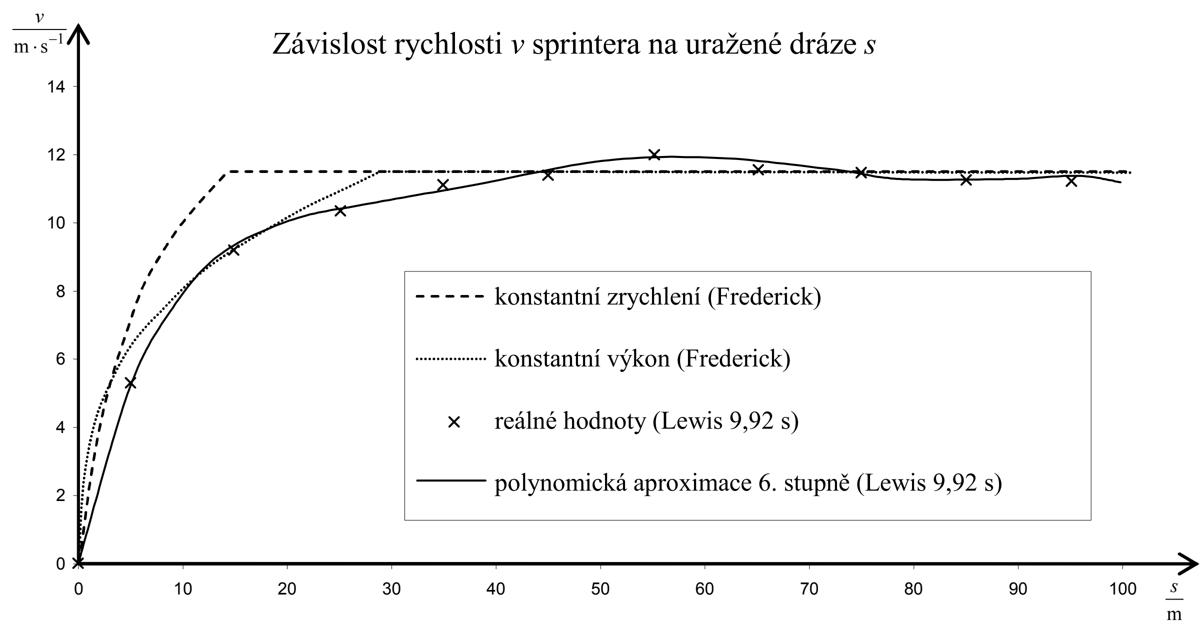
$$v = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot P}{m}} \cdot \sqrt[3]{s} .$$

Tedy rychlost při rovnoměrně zrychleném rozbíhání roste s druhou odmocninou dráhy, rychlost při rozbíhání se stálým výkonem roste s třetí odmocninou dráhy.

Jaký je skutečný pohyb sprintera? Lze asi očekávat, že reálnější předpoklad je stálý výkon sprintera, avšak ve skutečnosti se výkon spotřebuje nejen na urychlování, ale též na překonávání odporové síly, která s rychlostí roste. Znamená to, že rychlost bude růst pomaleji než v uvedeném modelu se stálým výkonem.

Jsou i další aspekty, které sehrávají jistou roli. Bezprostředně po startu vzroste výška těžiště sprintera. Dosáhne-li sprinter o hmotnosti 75 kg zvýšení svého těžiště o 80 cm během první sekundy po startu, je tento děj spojen s průměrným výkonem 600 W. Dále lze očekávat, že výkon sprintera bude souviset s frekvencí pohybu nohou, stejně jako u automobilu, kdy výkon je maximální při jisté frekvenci otáček motoru. Do výkonu je nutno dále zahrnout výkon nutný k pohybu nohou a paží, který poroste s frekvencí.

Zprostředkovaně jsem kdysi z jedněch skript získal kopie grafů analýzy běhu na 100 m z roku 1988 tří světových sprinterů. Jsou to Carl Lewis, Ben Johnson a Florence Jonyerová. (Omlouvám se autorovi skript, že z důvodu mé neznalosti nemohu zdroj citovat.) Dovolil jsem si vybrat graf Lewise, jehož čas 9,92 s v běhu na 100 m je nejbližší času Fredericka. Citovaný graf kromě rychlosti zobrazuje též délku kroku a frekvenci kroků. V analýze je uváděna maximální rychlost běhu $12{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, které Lewis dosáhl mezi 50. a 60. m dráhy.



V obrázku je vynesena závislost rychlosti na dráze obou popisovaných modelů běhu a skutečného Lewisova běhu. Ten je znázorněn získanými bodovými hodnotami proloženými křivkou polynomické funkce 6. stupně. Z porovnání je patrné, že věrnějším modelem je pohyb se stálým urychlujícím výkonem, přestože toto porovnání vykazuje nemalé rozdíly. Ty lze vysvětlit již zmíněným zanedbáním složek výkonu sprintera. Je však zřejmá ještě jedna vlastnost. Naše vypočtená maximální rychlost v_{m} není závislá na způsobu, jakým se sprinter do této rychlosti uvede, přesto skutečná maximální rychlost $12{,}04\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ se od vypočtené maximální rychlosti $11{,}49\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ liší. Svědčí to o tom, že ani špičkový sprinter není schopen svoji maximální rychlost udržet až do cíle (možná jsou výjimky) a že předpoklad rovnoměrného pohybu vyjádřený v úvodu tohoto článku vypočtené údaje zkresluje.