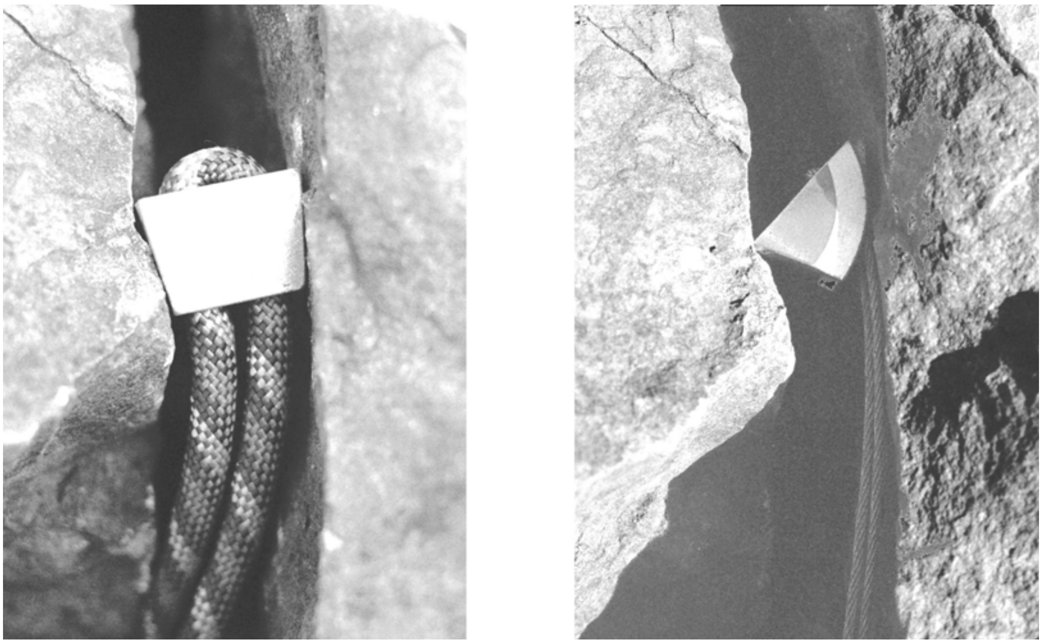
O výstředníkových vklíněncích

Jiří Dolejší, MFF UK, Praha*
*Jana Hronková**, Gymnázium J. Barranda Beroun*

Při zdolávání strmých stěn používají horolezci nejrůznější vybavení. Když se totiž chtějí jistit, potřebují k tomu něco pevného, do čeho se dá zapnout karabina s probíhajícím lanem. To „něco pevného“ může být skoba zatlučená do spáry, smyčka s uzlem vklíněným ve spáře nebo kruh upevněný do vyvrtané díry v pískovci. Posledních asi třicet let se používají vklíněnce − kousky kovu nebo plastu se smyčkou, které se, jak název napovídá, vklíní do spár a dírek ve skále. Vynalézavost lidu lezoucího po skalách a výrobců horolezeckého materiálu se soustředila na vymýšlení tvarů vklíněnců tak, aby byly co nejuniverzálnější a dobře držely v různých situacích.



obr. 1

Vklíněnce tvaru komolého jehlanu (zvané stopery, obr. 1 vlevo) jsou jen zřídka použitelné ve spárách s prakticky rovnoběžnými stěnami. Na takové spáry byly ale vymyšleny speciálně křivé vklíněnce, jako ten, který je na obrázku 1 vpravo. Říká se jim výstředníkové a my se budeme v tomto článku podrobně zabývat diskusí jeho tvaru.

Všimněte si opřeného „nosu“ druhého vklíněnce na levé straně spáry a lanka od vklíněnce na pravé strany temné spáry. Tyto dva postřehy naznačují princip funkce vklíněnce – pracuje jako tyčka jedním koncem opřená o nerovnost skály a opírající se druhým zatíženým koncem o protější stěnu spáry (viz obr. 2).

Taková tyčka by mohla fungovat docela dobře, ale bylo by potřeba najít prakticky vhodný úhel α jejího sklonu. Pro síly totiž platí jednoduché vztahy

$$\frac{F_z}{F_1} = \mathrm{tg}\alpha, \quad \frac{F_z}{F_2} = \sin\alpha \ ,$$

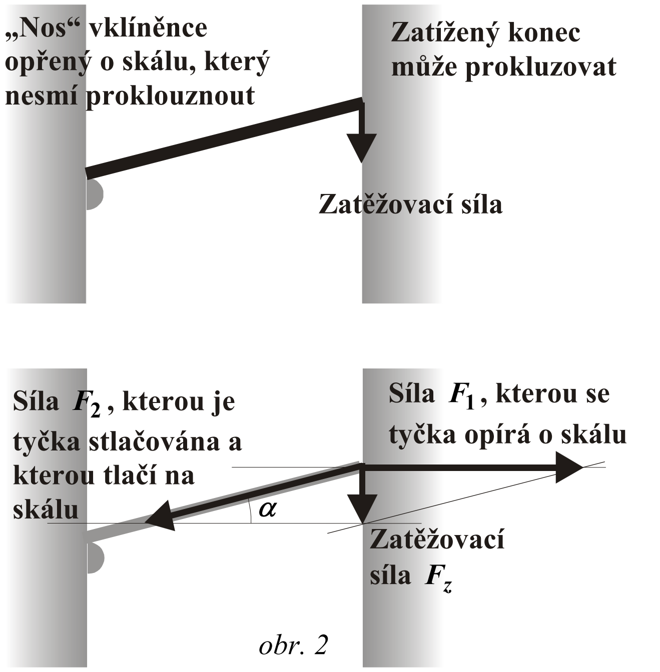
* jiri.dolejsi@mff.cuni.cz
** jana.hronkova@centrum.cz

kde F_1 – síla, kterou se tyčka opírá o skálu,

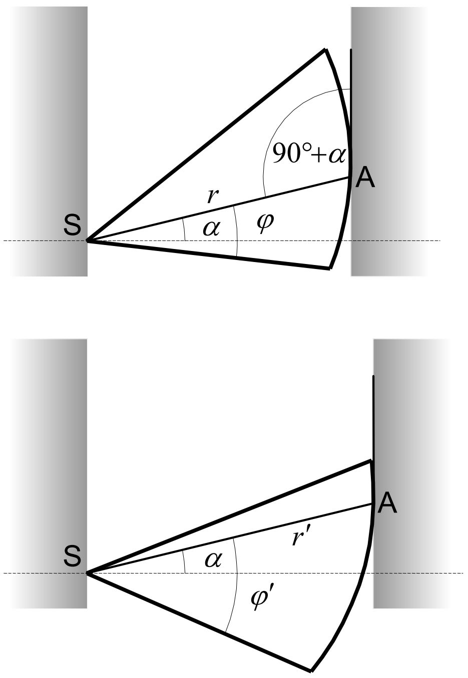
F_2 – síla, kterou je tyčka stlačována a kterou tlačí na skálu,

F_z – zatěžovací síla.

Pro velký úhel α by byly sice síly srovnatelné se zatěžovací silou F_z, ale hrozilo by sklouznutí tyčky z opěry nalevo. Při malém úhlu α se tyčka lépe zapře, ale síly, kterými je namáhána a kterými působí na stěny spáry, mohou být velmi velké. Chceme-li zachovávat nějaký optimální úhel α, pak narazíme na nutnost mít pro každou šířku spáry speciální tyčku.



obr. 2



obr. 3

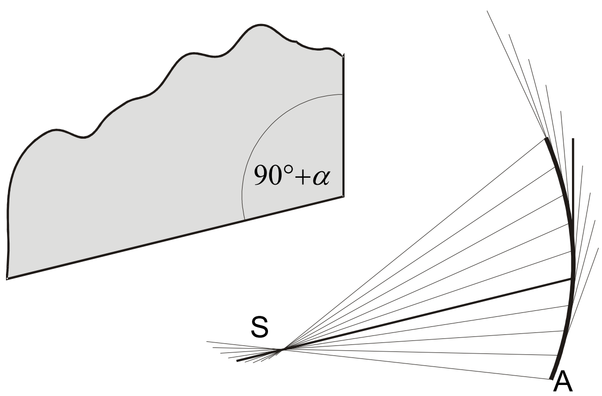
Zobrazený vklíněnec (viz obr. 1) funguje sice jako zmíněná tyčka (spojnice mezi „nosem“ a bodem dotyku na druhé straně), ale **přizpůsobuje se šířce spáry!** Pojďme prostudovat, jaký je jeho přesný tvar.

Zvolme počáteční polohu rotačního vklíněnce s body dotyku S, A. Pak vzdálenost bodů dotyku vklíněnce a skály je $r = \mathsf{SA}$. Širší štěrbině se vklíněnec přizpůsobí tak, že se pootočí, takže nové body dotyku jsou nyní vzdáleny r'. Přitom se však úhel α mezi spojnicí dotykových bodů a kolmicí na stěny štěrbiny nemění a vklíněnec drží stejně dobře jako dřív.

Užívaná hodnota α, která je dána zkušeností horolezců, je $13{,}75°$. Při pootočení vklíněnce kolem bodu S se ale mění úhel φ, který svírá spojnice bodů dotyku a hrana vklíněnce. Tvar vklíněnce je charakterizován závislostí r na úhlu φ. To se často popisuje slovy, že máme tvar zadaný křivkou v polárních souřadnicích r, φ s počátkem v bodě otáčení S (viz obr. 3).

Pro lepší představu hledaného tvaru se nebojte vzít do ruky dvě čtvrtky, nůžky, pravítko a úhloměr a vytvořit si papírový model funkčního výstředníkového vklíněnce.

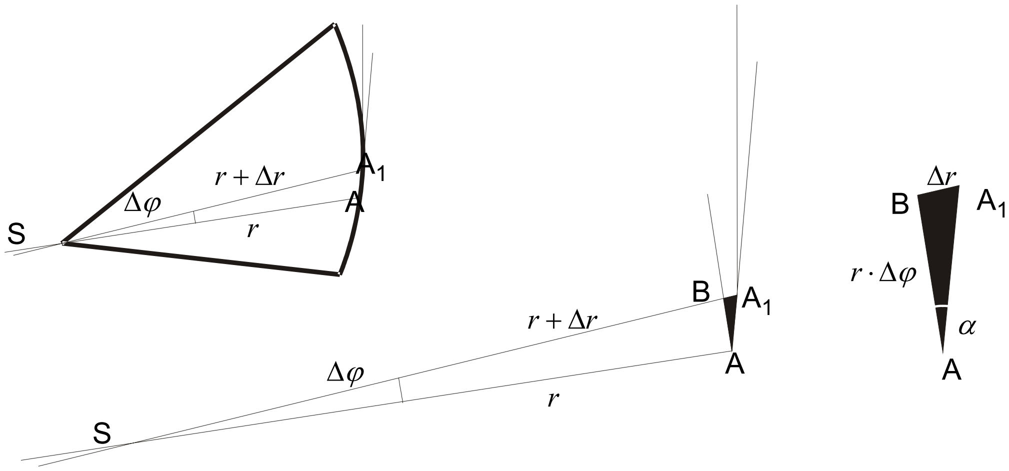
Z jedné čtvrtky vyrobte tupý úhel $90° + \alpha$ (viz obr. 4). Na druhé čtvrtce zvolme bod otáčení S a počáteční dotykový bod A. Postupně přikládáme přes čtvrtku tupý úhel tak, aby



obr. 4

jedna jeho hrana stále procházela bodem S a přitom podél druhé hrany úhlu budeme dokreslovat na čtvrtku krátké úsečky. Měníme tak délku r a vytvořená lomená čára nahrazuje plynulou křivku okraje vklíněnce.

Jsou-li body dotyku rotačního vklíněnce pro určitou šířku štěrbiny označeny S, A, pak při malém zvětšení štěrbiny se vklíněnec pootočí o úhel $\Delta\varphi$ (viz obr. 5). Nové body dotyku označme S, A_1.



obr. 5

Při malém pootočení $\Delta\varphi$ je $\triangle ABA_1$ téměř pravoúhlý s přeponou AA_1, úhlem α u vrcholu A a platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta r}{r\cdot\Delta\varphi}. \tag{1}$$

K určení tvaru vklíněnce hledáme závislost r na φ vyhovující této rovnici. Tuto rovnici lze řešit například numericky (např. pomocí programu Famulus nebo vámi sestaveného vlastního programu v libovolném programovacím jazyce), jak je naznačeno v následujících řádcích.

```
pocatecni hodnoty: delka=1;delta_fi=0.1;tangens_alfa=0.24
krok cyklu:     nova_delka=delka + delka*delta_fi*tangens_alfa
```

$$\text{neboli } \Delta r = \operatorname{tg}\alpha\cdot r\cdot\Delta\varphi = K\cdot r\,.$$

Tak jsme naprogramovali zvětšení délky r v jednom kroku cyklu vypočtené z předcházející rovnice, kde K je konstanta.

Označme r_0 počáteční hodnotu vzdálenosti dotykových bodů a r_1, r_2, r_3, …, r_n vzdálenosti po 1, 2, 3, …, n krocích. Je-li $\Delta r = r_n - r_{n-1}$, pak platí $r_n = r_{n-1} + r_{n-1}\cdot K = r_{n-1}\cdot(1+K)$ a tedy

$$r_n = r_0\cdot(1+K)^n = r_0\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\Delta\varphi)^n, \tag{2}$$

kde n je dáno zvolenou délkou kroku $\Delta\varphi$ a úhlem φ, který nás zajímá.
Platí tedy

$$n = \frac{\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Vztah (2) vám jistě připomene známé úlohy z finanční matematiky o úročení vkladů (snadno zjistíte, že námi zvolené hodnoty odpovídají zúročení 2,5 %).

S pomocí numerických výpočtů nebo příslušných tabulek můžete vypočítat tvar vklíněnce, který jste sestrojili graficky. Ale pokračujme v matematických úpravách dále. Jednoduché problémy musí mít elegantní řešení!

S využitím definice logaritmické a exponenciální funkce můžeme vztah (2) dále upravit

$$r_n = r_0 \cdot e^{\ln(1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\Delta\varphi)^n} = r_0 \cdot e^{n\cdot\ln(1+\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\Delta\varphi)}$$

Protože však hodnota $\mathrm{tg}\alpha \cdot \Delta\varphi$ je při našich úvahách velmi malá, můžeme použít přibližný vztah $\ln(1+x) \approx x$, tak

$$\ln(1+\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta\varphi) \approx \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \Delta\varphi .$$

Pak

$$r(\varphi) = r_n \approx r_0 \cdot e^{n\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\Delta\varphi} = r_0 \cdot e^{\varphi\cdot\mathrm{tg}\,\alpha} .$$

Tento vztah již sice neobsahuje $\Delta\varphi$, ale aby platil dostatečně přesně, musí být $\Delta\varphi$ dostatečně malé.

Matematicky zručný čtenář již v rovnici (1) poznal diferenciální rovnici

$$r \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$$

a umí najít její řešení ve tvaru

$$r = r_0 \cdot e^{\varphi\cdot\mathrm{tg}\,\alpha} .$$

Všechny metody vedou ke stejnému řešení úlohy. Všechny nám dovolují pochopit, jak původně tajemně zakřivený vklíněnec funguje, a také umožňují ho vyrobit. Stejný princip funkce mají i složitější „zařízení“ jako na obrázku 6.

Výše zmíněná hodnota úhlu α – 13,75° – je výsledkem praktické optimalizace. Jde totiž o to, aby se vklíněnce při použití standardních lehkých materiálů (duralu) příliš nezdeformovaly a neproklouzly spárou (to hrozí při malém α), ale aby se správně „zakously“. Jde tu o velké síly – karabiny a smyčky jsou dimenzovány typicky na 22 kN. Zatížíte-li vklíněnec s úhlem 13,75° takovou silou, pak tlačí do stěn spáry silami zhruba 90 kN. I když to vydrží vklíněnec, nemusí to vydržet skála. Proto je lezení stále nebezpečnou činností, kdy jištění může mít stěží stoprocentní účinnost. Ale ani sezení u stolu není bez rizika …

obr. 6

Další zajímavé informace najdete například na webové stránce jednoho z výrobců: www.wildcountry.co.uk, najdete je také v horolezecké literatuře a časopisech a konečně v obchodech s horolezeckým vybavením a na skalách.