Písemná maturitní zkouška z fyziky v Bavorsku

Petr Mazanec[*], Gymnázium Sušice

V poslední době k učitelské veřejnosti začínají přicházet zprávy o chystaných změnách v organizaci maturitních zkoušek na středních školách v blízké budoucnosti. Jednou z možností je zavedení písemné maturitní zkoušky kromě mateřského jazyka i v jiných předmětech.

Na druhé straně Šumavy se závěrečné písemné zkoušky dělají na reálkách i gymnáziích. Díky našim kolegům z Realschule v Kötztingu se mi dostalo do ruky zadání písemné maturitní zkoušky z fyziky pro gymnázia v Bavorsku z roku 1996. Ze šesti zadaných sérií úloh si studenti musí vybrat dvě série a na jejich vypracování mají celkem tři hodiny čistého času. Za každou sérii mohou získat maximálně 60 bodů. Body za každou podotázku mají v zadání vyznačeny.

Pro posouzení náročnosti této zkoušky a obsahu zadaných úloh jsem je všechny přeložil do češtiny a každý čtenář si sám může udělat úsudek o jejich úrovni. Na závěr je navíc uvedena tabulka pro hodnocení této písemné práce.

Počet dosažených bodů	Známka	Body	Intervaly
120–115	+1	15	
114–109	1	14	15 %
108–103	1–	13	
102–97	+2	12	
96–91	2	11	15 %
90–85	2–	10	
84–79	+3	9	
78–73	3	8	15 %
72–67	3–	7	
66–61	+4	6	
60–55	4	5	15 %
54–49	4–	4	
48–41	+5	3	
40–33	5	2	20 %
32–25	5–	1	
24–0	6	0	20 %

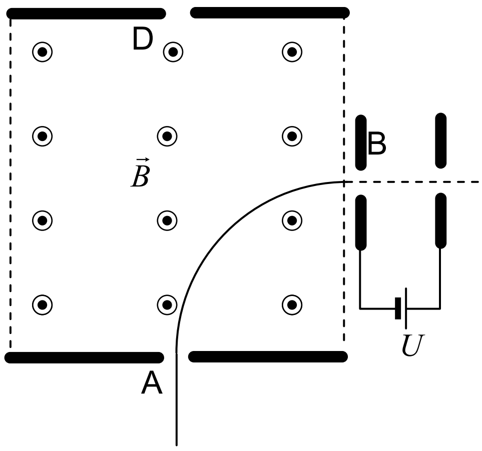
LITERATURA:

[1] *Abiturprüfung*. Physik als Grundkursfach, 1996.

SÉRIE 1

1. Paprsek kationtů lithia ($^6\mathrm{Li}^+$, $^7\mathrm{Li}^+$) vstupuje v otvoru A do homogenního magnetického pole o indukci $15\,\mathrm{mT}$ kolmo k indukčním čarám (viz obr.). Druhý otvor B je umístěn tak, že část iontů, které se pohybují po čtvrtkružnici o poloměru $0{,}1\,\mathrm{m}$, vstupuje otvorem do elektrického pole kondenzátoru, na kterém je napětí $16{,}7\,\mathrm{V}$. Celé zařízení je umístěno ve vakuu.

[*] MPetr@seznam.cz



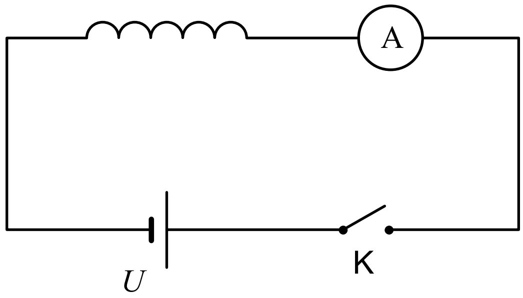
a) Dokažte, že ionty musí mít kinetickou energii minimálně $2,7 \cdot 10^{-18}$ J, aby prošly kondenzátorem do bodu C. (4 body)

b) Vypočtěte, že ionty na čtvrtkružnici mají hybnost $p = 2,4 \cdot 10^{-22}$ N·s. (6 bodů)

c) Určete kinetickou energii iontů $^{6}Li^{+}$ a $^{7}Li^{+}$ na čtvrtkružnici a dokažte, že kondenzátorem projdou pouze ionty $^{6}Li^{+}$. (9 bodů)

d) Otvor D je symetrický s otvorem A podle přímky BC. Popište pohyb iontů $^{7}Li^{+}$ po vlétnutí do otvoru B. (8 bodů)

2. Dlouhou válcovou cívku ($N = 250$ závitů, délka $l = 0,24$ m, průřez $S = 20\ \text{cm}^2$) můžeme připojit pomocí spínače K ke zdroji napětí $U = 4$ V. Odpor vodičů a cívky je $8\ \Omega$ (viz obr.).

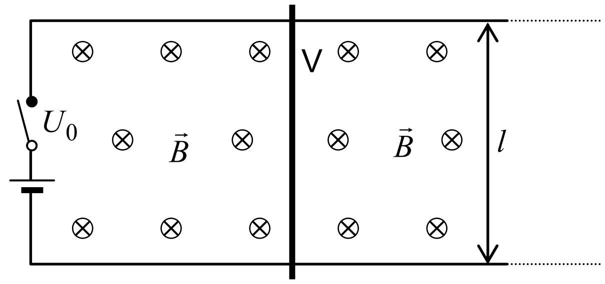


a) Vypočtěte indukčnost L_0 cívky bez jádra. (2 body)

b) Cívka s železným jádrem má indukčnost $L = 0,65$ H. Po zapnutí spínače proud v cívce asymptoticky vzroste na maximální hodnotu I_m. Vypočtěte I_m a velikost magnetické energie v tomto okamžiku. (6 bodů)

c) Paralelně k cívce připojíme doutnavku se zápalným napětím $U_z = 80$ V. Je možné, aby se doutnavka při vypnutí spínače nakrátko rozsvítila? Fyzikálně zdůvodněte. (6 bodů)

3. Pohyblivý tenký vodič V je položen na dvou dlouhých paralelních vodičích, jejichž vzdálenost je l a leží v horizontální rovině. Celé zařízení je ve vertikálním homogenním magnetickém poli o indukci $\vec{B}$ a je připojeno ke zdroji napětí U_0 (viz obr.). Vodič je v klidu a v čase $t = 0$ s zapneme spínač.



a) Jaká síla $\vec{F}$ začne působit na vodič a jak se bude vodič pohybovat? (4 body)
b) Určete, jaké napětí bude mezi konci vodiče při jeho pohybu v závislosti na rychlosti v důsledku elektromagnetické indukce. (8 bodů)
c) Určete, jakou maximální rychlostí v_m se může vodič pohybovat. (7 bodů)

ŘEŠENÍ 1. SÉRIE

1.

a) $E_k \geq 16,7\ \text{eV} \doteq 2,7 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$

b) $F_m = F_d$, $p = m \cdot v \Rightarrow p = B \cdot e \cdot r \doteq 2,4 \cdot 10^{-22}\ \text{N} \cdot \text{s}$

c) $E_k = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \dfrac{p^2}{2 \cdot m} \Rightarrow E_k\left({}^6\text{Li}^+\right) = 2,9 \cdot 10^{-18}\ \text{J} > 2,7 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$,

$E_k\left({}^7\text{Li}^+\right) = 2,5 \cdot 10^{-18}\ \text{J} < 2,7 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$

d) Ionty ${}^7\text{Li}^+$ se v kondenzátoru zabrzdí, vrátí se zpět do bodu B a budou se pohybovat po čtvrtkružnici do otvoru D (Flemingovo pravidlo).

2.

a) $L_0 = \dfrac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot S}{l} = 6,5 \cdot 10^{-4}\ \text{H}$

b) $I_m = \dfrac{U}{R} = 0,5\ \text{A}$, $E_m = \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot I_m^2 \doteq 81\ \text{mJ}$

c) $U_D = U + L \cdot \left|\dfrac{\Delta I}{\Delta t}\right| \gg U$. Pokud je $U_D \geq U_z$, může doutnavka svítit.

3.

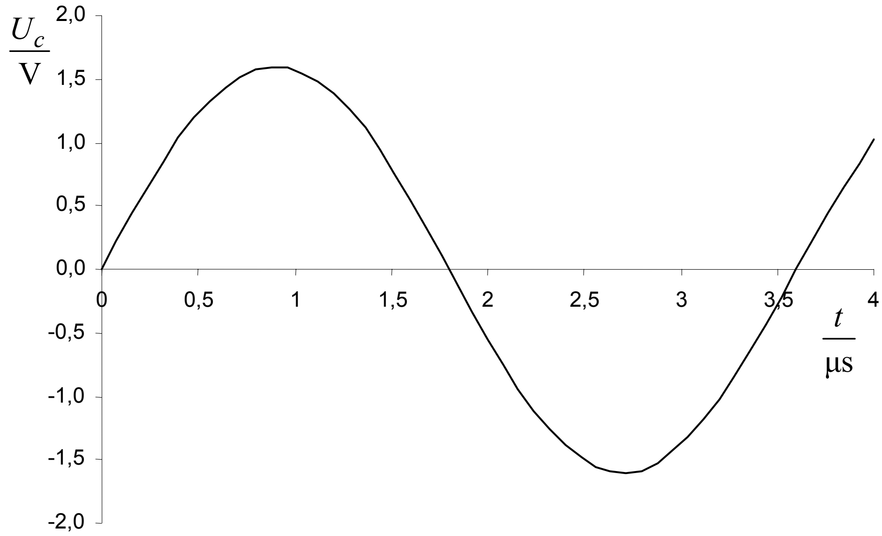
a) Podle Flemingova pravidla začne na vodič působit magnetická síla $F_m = B \cdot I \cdot l$ směrem doprava. Vodič se bude pohybovat zrychleně tímto směrem.

b) Ve vodiči se při pohybu doprava zároveň indukuje napětí a proud, které mají opačný směr než napětí a proud od zdroje (Lenzův zákon) $\Rightarrow U = U_0 - U_i = U_0 - B \cdot l \cdot v$

c) $I = \dfrac{U_0 - U_i}{R} \Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow U_0 = U_i \Rightarrow F_m = 0 \Rightarrow$ vodič se bude dále pohybovat rovnoměrně: $U_0 = B \cdot l \cdot v_m \Rightarrow v_m = \dfrac{U_0}{B \cdot l}$.

SÉRIE 2

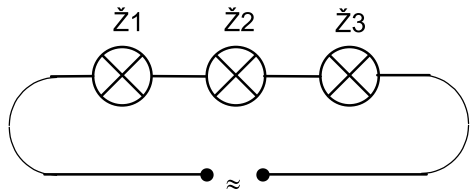
1. U oscilačního obvodu s kapacitou $C = 10\,\mathrm{nF}$ je ke kondenzátoru připojen osciloskop a na jeho obrazovce můžeme pozorovat závislost napětí U_c na čase t (viz obr.).



a) Určete z osciloskopu periodu T_0 a frekvenci f_0 vlastních kmitů oscilačního obvodu a vypočtěte indukčnost L oscilačního obvodu. (7 bodů)

b) Určete z osciloskopu amplitudu napětí U_m na kondenzátoru, celkovou energii obvodu a vypočtěte amplitudu proudu I_m, který prochází obvodem. (8 bodů)

c) Oscilační obvod s vlastní frekvencí $f = 280\,\mathrm{MHz}$ je připojen k půlvlnnému dipólu. Vypočtěte jeho délku. (4 body)

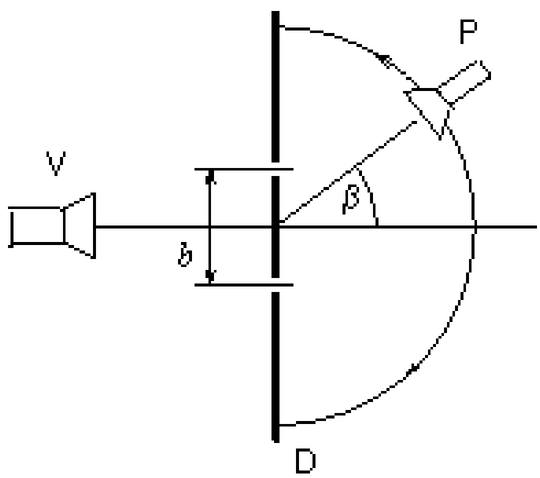


d) Ve čtvrtině, polovině a ve třech čtvrtinách délky dipólu jsou zapojeny stejné žárovky Ž1, Ž2, Ž3. Žárovka Ž1 svítí slabě; jak silně svítí Ž2 a Ž3 vzhledem k Ž1? Vysvětlete. (5 bodů)

2. Mikrovlnné záření z vysílače V dopadá kolmo na kovovou desku D s dvěma svislými štěrbinami (vzdálenost středů štěrbin je $b = 20\,\mathrm{cm}$). Přijímač P za deskou se může pohybovat po půlkružnici (viz obr.). Pro úhel $\beta_0 = 0°$ a $\beta_1 = 12°$ zaznamená přijímač maximální příjem mikrovlnného záření.

a) Určete frekvenci f vysílače. (4 body)

b) Určete, kolik maxim při pohybu přijímače po půlkružnici můžeme zjistit. (6 bodů)



c) Vysílač nyní vysílá spojité frekvenční spektrum mikrovln v intervalu od 6,5 GHz do 15 GHz. Zjistěte, jestli se překrývá spektrum 1. řádu se spektrem 2. řádu. (8 bodů)

3. Fotoefekt pozorujeme pomocí vakuové fotonky.

a) Popište sestavení a průběh experimentu k určení maximální kinetické energie E_k fotoelektronů, které vylétávají z katody. (10 bodů)

b) Použijeme-li fotonku s cesiovou katodou, naměříme při následujících frekvencích dopadajícího záření kinetické energie fotoelektronů uvedené v tabulce. Jaké kinetické energie fotoelektronů naměříme, zapojíme-li fotonku s draslíkovou katodou? (8 bodů)

$\frac{f}{10^{14}\ \text{Hz}}$	$\frac{E_k}{\text{eV}}$
5,19	0,20
5,49	0,33
6,10	0,58
6,88	0,90

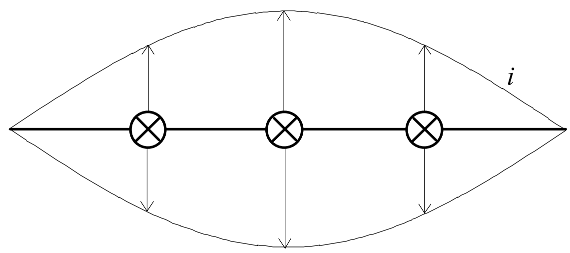
Řešení 2. série

1.

a) $T_0 = 3{,}6\ \mu\text{s}$, $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2{,}8\cdot 10^5\ \text{Hz}$, $T_0 = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C} \Rightarrow L = \frac{T_0^2}{4\cdot\pi^2\cdot C} = 3{,}3\cdot 10^{-5}\ \text{H}$

b) $U_m = 1{,}6\ \text{V}$, $E = \frac{1}{2}\cdot C\cdot U_m^2 = \frac{1}{2}\cdot L\cdot I_m^2 = 1{,}3\cdot 10^{-8}\ \text{J} \Rightarrow I_m = U_m\cdot\sqrt{\frac{C}{L}} = 28\ \text{mA}$

c) $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\cdot f} \doteq 54\ \text{cm}$



d) Ž3 svítí stejně jako Ž1; Ž2 svítí nejsilněji (kmitna proudu) – viz obr.

2.

a) maximum 1. řádu: $b\cdot\sin\beta_1 = \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow f = \frac{c}{b\cdot\sin\beta_1} = 7{,}2\cdot 10^9\ \text{Hz}$

b) $k\cdot\lambda = b\cdot\sin\alpha \le b \Rightarrow k \le \frac{b\cdot f}{c} = 4{,}8 \Rightarrow k\in\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4\} \Rightarrow$ maxim je celkem devět

c) maximum 1. řádu pro 6,5 GHz: $\beta = 13°$, maximum 2. řádu pro 15 GHz: $\beta = 12° < 13° \Rightarrow$ spektra se překrývají.

3.

b) výstupní práce: $W_{\mathrm{Cs}} = 1{,}94\ \mathrm{eV}$, $W_{\mathrm{K}} = 2{,}25\ \mathrm{eV} \Rightarrow \Delta W = W_{\mathrm{K}} - W_{\mathrm{Cs}} = 0{,}31\ \mathrm{eV} \Rightarrow$ kinetické energie pro draslík budou menší o $0{,}31\ \mathrm{eV}$, pro první frekvenci bude $E_k = 0\ \mathrm{J}$, protože energie fotonů je menší než W_{K}.

SÉRIE 3

1. Jasný důkaz nedostatečnosti Rutherfordova modelu atomu dává pozorování emisních spekter zářících plynů.

a) Popište, jak vypadá atomární spektrum vodíku a jak ho můžeme pozorovat. (5 bodů)

b) Jaký je rozdíl mezi tímto spektrem a spektrem, které vyplývá z Rutherfordova modelu? (3 body)

2. V kvantověmechanickém modelu atomu vodíku je pohyb elektronu popsán pomocí vlnové funkce ψ.

a) Jaká je Bornova interpretace vlnové funkce ψ? (4 body)

Potenciálová jáma popisuje přibližně situaci v atomu vodíku. Elektron se nachází v potenciálové jámě délky $l = 1{,}4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}$. Potenciální energie elektronu je nulová. De Broglieho vlnová délka elektronu splňuje podmínku $l = n \cdot \dfrac{\lambda}{2}$, kde $n \in \mathrm{N}$.

b) Zdůvodněte vztah mezi l a n. (6 bodů)

c) Dokažte, že celková energie elektronu v potenciálové jámě je kvantována a v nerelativistickém případě splňuje vztah $E_n = \dfrac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot n^2$. (8 bodů)

d) Vypočtěte energetické hladiny elektronu E_1 až E_6 a nakreslete schéma těchto hladin ($1\ \mathrm{eV} \mathrel{\hat{=}} 1\ \mathrm{cm}$). (6 bodů)

Tento vodík je v základním stavu ($n = 1$) a osvítíme ho bílým světlem ($\lambda \in (400;\ 750)\ \mathrm{nm}$).

e) Dokažte, že v absorpčním spektru budeme pozorovat pouze jednu tmavou spektrální čáru. Jakou má vlnovou délku a jaká barva světla této délce odpovídá? (7 bodů)

3. Poznatky o stavbě atomů s vyšším protonovým číslem dostaneme zkoumáním jejich rentgenových spekter.

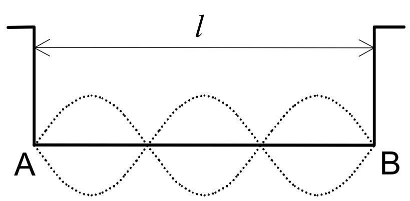
a) Načrtněte a popište základní stavbu rentgenky. (6 bodů)

b) Nakreslete typický průběh intenzity spektra rentgenky. Přitom vyznačte, že se skládá ze dvou různých částí. (5 bodů)

c) Vysvětlete příčiny tzv. charakteristických spektrálních čar a výskyt krátkovlnné hranice rentgenového spektra. (10 bodů)

ŘEŠENÍ 3. SÉRIE

2.



b) Na krajích potenciálové jámy je pravděpodobnost nulová, tzn. de Broglieho vlna musí mít v krajních bodech uzly $\Rightarrow l = n \cdot \frac{\lambda}{2}$, kde $n \in \mathbb{N}$

c) $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$ (de Broglieho vlnová délka), $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m} = \frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2}$ a $E_p = 0 \Rightarrow$

$$E_n = E_k + E_p = \frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \left(\frac{2 \cdot l}{n}\right)^2} = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot n^2$$

d) $E_1 = 0{,}19\ \mathrm{eV}$, $E_2 = 0{,}77\ \mathrm{eV}$, $E_3 = 1{,}73\ \mathrm{eV}$, $E_4 = 3{,}08\ \mathrm{eV}$, $E_5 = 4{,}81\ \mathrm{eV}$ a $E_6 = 6{,}92\ \mathrm{eV}$

e) $400\ \mathrm{nm} \le \lambda \le 750\ \mathrm{nm} \Rightarrow 1{,}66\ \mathrm{eV} \le \Delta E \le 3{,}11\ \mathrm{eV} \Rightarrow$ pouze $\lambda = 431\ \mathrm{nm}$ (fialová, tj. $\Delta E = E_4 - E_1 = 2{,}88\ \mathrm{eV}$) leží v daném intervalu.

SÉRIE 4

1. Přirozené radioaktivní záření obsahuje tři složky: α, β a γ-záření.

a) Charakterizujte tyto tři druhy záření podle energie a ionizačních schopností. (6 bodů)

Zařízení pro detekci radioaktivního záření je Geigerův–Müllerův počítač.

b) Popište strukturu počítače, načrtněte ho a vysvětlete jeho funkci. (8 bodů)

2. β-rozpad nuklidu $^{137}\mathrm{Cs}$ je doprovázen vznikem γ-záření. Z vhodně upraveného preparátu vychází ven pouze γ-záření. Kvantitativní zkoumání pohlcování γ-záření v olovu se provádí pomocí olověných desek s tloušťkou d a s Geigerovým–Müllerovým počítačem těsně za deskou (viz tabulka naměřených hodnot): Z je počet prošlých částic za 1 s, $[Z] = \mathrm{s}^{-1}$. U této veličiny je již vykompenzována aktivita pozadí.

$\frac{d}{\mathrm{mm}}$	0	1	2	3	4	5	7	9	15	20
$\frac{Z}{\mathrm{s}^{-1}}$	50	46	41	38	34	31	26	22	12	8

a) Narýsujte graf závislosti Z na d. (3 body)

Analogicky jako poločas rozpadu se definuje polotloušťka D při absorbci γ-záření látkou.

b) Definujte polotloušťku a určete z grafu její velikost pro olovo. (4 body)

c) Vypočtěte Z bez pozadí pro tloušťku 30 mm. (7 bodů)

Použitý preparát emituje za sekundu $3{,}7 \cdot 10^6$ γ-kvant s energií $E_\gamma = 0{,}622\ \mathrm{MeV}$ ve všech směrech.

d) Vypočtěte energii γ-záření v J, kterou zářič vyzáří za jeden rok. (3 body)

Když se zářič nepoužívá, je uložen v olověném válci s poloměrem 3 cm a výškou 10 cm, ve kterém se 96 % γ-záření pohltí.

e) Vypočtěte roční energetickou dávku v Gy, kterou pohltí válec. Dutinu ve válci zanedbejte. (7 bodů)

Osoba, která se opakovaně pohybuje v blízkosti zářiče, musí dbát na to, aby její ozáření bylo co nejmenší.

f) Pojmenujte základní pravidla ochrany před zářením a krátce je fyzikálně zdůvodněte. (6 bodů)

g) Vysvětlete, proč rozlišujeme energetickou dávku a ekvivalentní dávku. (5 bodů)

3. Rutherford provedl roku 1919 první umělou jadernou přeměnu prvků. Dusík ^{14}N bombardoval rychlými α-částicemi a jako produkt reakce vznikaly rychlé protony, které vylétaly z terčíku.

a) Napište rovnici jaderné reakce a určete, v jaký chemický prvek se dusík změnil. (3 body)

b) Popište energetickou bilanci reakce, vypočtěte energii reakce Q a vysvětlete, o jakou reakci se jedná. (8 bodů)

ŘEŠENÍ 4. SÉRIE

2.

b) Z grafu určíme $D = 7{,}5\ \text{mm}$.

c) Exponenciální pokles: $30\ \text{mm} = 4 \cdot D \Rightarrow Z(30\ \text{mm}) = Z_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \doteq 3{,}1\ \text{s}^{-1}$

d) $E = 3{,}7 \cdot 10^6 \cdot E_\gamma \cdot t \doteq 12\ \text{J}$

e) $D = \dfrac{E'}{m} = \dfrac{E \cdot 0{,}96}{V \cdot \rho} = \dfrac{E \cdot 0{,}96}{\pi \cdot r^2 \cdot v \cdot \rho} \doteq 3{,}5\ \text{Gy}$.

3.

a) $^{14}_{7}\text{N} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\text{O} + {}^{1}_{1}\text{H}\left({}^{1}_{1}\text{p}\right)$

b) $Q = -1{,}2\ \text{MeV} \Rightarrow$ endoenergetická reakce

SÉRIE 5

1. Planeta Saturn s prstencem poskytuje pozorovateli s dalekohledem nezapomenutelný zážitek. Zvlášť dobře pozorovatelný je Saturn v opozici se Sluncem.

a) Uveďte dva důvody pro dobré pozorování. (3 body)

Dvě po sobě následující Saturnovy opozice byly 1. 9. 1994 a 14. 9. 1995.

b) Vypočtěte dobu oběhu Saturnu kolem Slunce v rocích a délku jeho hlavní poloosy v AU. (8 bodů)

c) Načrtněte trajektorie Saturnu a Země kolem Slunce a vysvětlete, proč byl Saturnův prstenec v letech 1973 a 1988 ze Země jasný a široký a v letech 1966, 1981 a 1995 velmi úzký. Saturn v roce 1995 nakreslete v opozici. (9 bodů)

Prstencový systém Saturnu se skládá ze samostatných těles rozměrů řádu metru. Vnitřní a vnější poloměry prstenců jsou $r_i = 7{,}26 \cdot 10^4\ \text{km}$, $r_a = 1{,}36 \cdot 10^5\ \text{km}$.

d) Dokažte, že poměr rychlostí $\dfrac{v_i}{v_a} = 1{,}37$, a ukažte, že prstencový systém se neotáčí jako kompaktní tuhé těleso. (7 bodů)

e) Rychlost částic ve vnitřním prstenci je $22{,}9\ \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete hmotnost planety Saturn. (5 bodů)

2. Slunce ztrácí svoji hmotu. Tento jev má dvě příčiny. Při jaderné syntéze v nitru se uvolňuje energie a je vyzařována do prostoru a zároveň Slunce emituje proud nabitých částic (sluneční vítr).

a) Vypočtěte úbytek hmotnosti Slunce za 1 s způsobený zářením. (5 bodů)

Zkoumání původu slunečního větru vede k domněnce, že se jedná o plynné částice emitované ze slunečního povrchu. Nejrychlejší z nich mají rychlost $10\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

b) Vypočtěte únikovou rychlost pro částice slunečního větru a dokažte, že tato domněnka není správná. (7 bodů)

Slunce také vyzařuje rentgenové záření s maximem intenzity pro vlnovou délku 3 nm.

c) Určete teplotu místa, z kterého rentgenové záření vychází. (3 body)

Toto místo s velmi vysokou teplotou je nejvyšší část sluneční atmosféry (koróna). Zde vznikají částice s rychlostmi, které jim umožní uniknout z gravitačního pole Slunce a vytvořit sluneční vítr. Ten obsahuje prakticky rovnoměrné množství protonů a elektronů. Ve vzdálenosti 1 AU od Slunce prochází kolmo plochou $1\ \mathrm{m^2}$ za 1 s $2{,}7 \cdot 10^{12}$ částic.

d) Jakou hmotu ztrácí Slunce za 1 s slunečním větrem? Kolik % z celkové ztráty hmoty to je? (9 bodů)

e) Jmenujte a popište účinky slunečního větru na Zemi. (4 body)

ŘEŠENÍ 5. SÉRIE

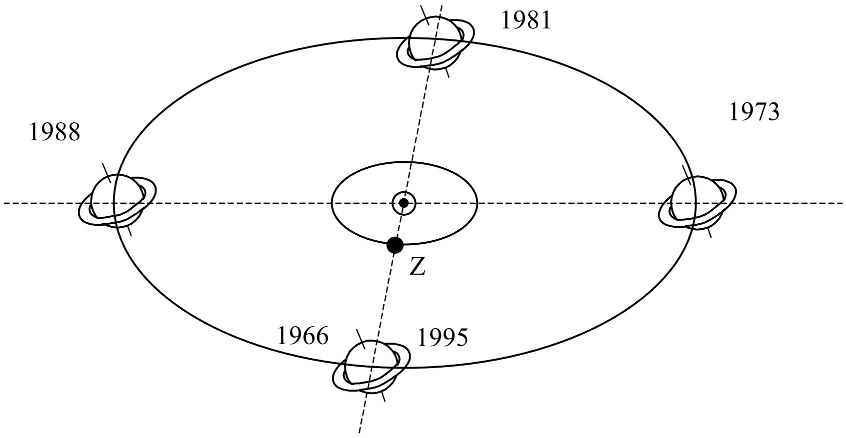
1.

a) Saturn je blíže Zemi a svítí jasněji, je pozorovatelný po celou noc.

b) $T_{syn} \doteq 365\mathrm{d} + 13\mathrm{d} = 378\mathrm{d}$, $T_Z \doteq 365\mathrm{d}$, $\dfrac{1}{T_S} = \dfrac{1}{T_Z} - \dfrac{1}{T_{syn}} \Rightarrow T_S \doteq 29\ \mathrm{r}$,

$$\left(\frac{a_S}{a_Z}\right)^3 = \left(\frac{T_S}{T_Z}\right)^2 \Rightarrow a_S \doteq 9{,}5\mathrm{AU}$$

c)



d) $\dfrac{m \cdot v^2}{r} = \varkappa \cdot \dfrac{m \cdot m_S}{r^2} \Rightarrow v = \dfrac{k}{\sqrt{r}}$, kde $k = \sqrt{\varkappa \cdot m_S}$ je konstanta $\Rightarrow v \sim \dfrac{1}{\sqrt{r}}$, pro tuhé těleso $v = r \cdot \omega \Rightarrow v \sim r$; $v_i : v_a = \sqrt{r_a : r_i} \doteq 1{,}37$

e) $m_S = \dfrac{v_i^2 \cdot r_i}{\varkappa} \doteq 5{,}7 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kg}$.

2.

a) $L_{\odot} \cdot \Delta t = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dfrac{L_{\odot}}{c^2} = 4{,}3 \cdot 10^9\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$

b) $v_p = \sqrt{\dfrac{2 \cdot \varkappa \cdot M}{r}} \doteq 620\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} \gg 10\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$

c) $\lambda \cdot T = b \Rightarrow T = \dfrac{b}{\lambda} \doteq 10^6\ \mathrm{K}$

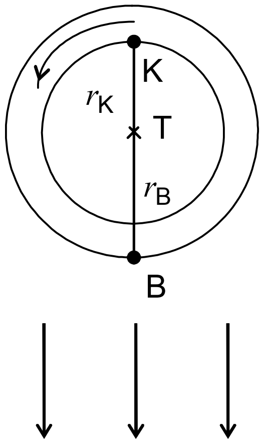
d) $\Delta m = \dfrac{N}{2} \cdot \left(m_p + m_e\right) \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \Delta t \doteq \dfrac{N}{2} \cdot m_p \cdot 4 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \Delta t$,

$\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = 2 \cdot N \cdot m_p \cdot \pi \cdot a^2 \doteq 6{,}3 \cdot 10^8\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$, $p = \dfrac{\Delta m_2}{\Delta m_1 + \Delta m_2} \doteq 13\ \%$

e) magnetické bouře, polární záře, …

SÉRIE 6

1. Dvojhvězda ζ Aurigae se skládá z hvězd B a K, které se pohybují po kružnicích kolem společného těžiště T. Země je velmi vzdálená a leží v oběžné rovině obou hvězd (viz obr.).



a) Nakreslete pozice hvězd po uplynutí čtvrtperiody oběžné doby hvězdy K.

b) Změna pozice hvězdy při oběhu způsobuje změnu jejich spektra. Kvalitativně popište změnu spekter obou hvězd během čtvrtperiody. Určete poměr rychlostí $\dfrac{v_B}{v_K}$ a poměr maximálních Dopplerových posuvů $\dfrac{\Delta\alpha_B}{\Delta\alpha_K}$ spektrálních čar v této čtvrtperiodě.

c) Hvězdy mají hmotnosti M_B a M_K a působí na sebe navzájem dostředivými silami. Určete vztah mezi hmotnostmi hvězd a jejich poloměry R_B, R_K; $M_K = 8 \cdot M_{\odot}$. Vyjádřete M_B jako násobek $M_{\odot}$.

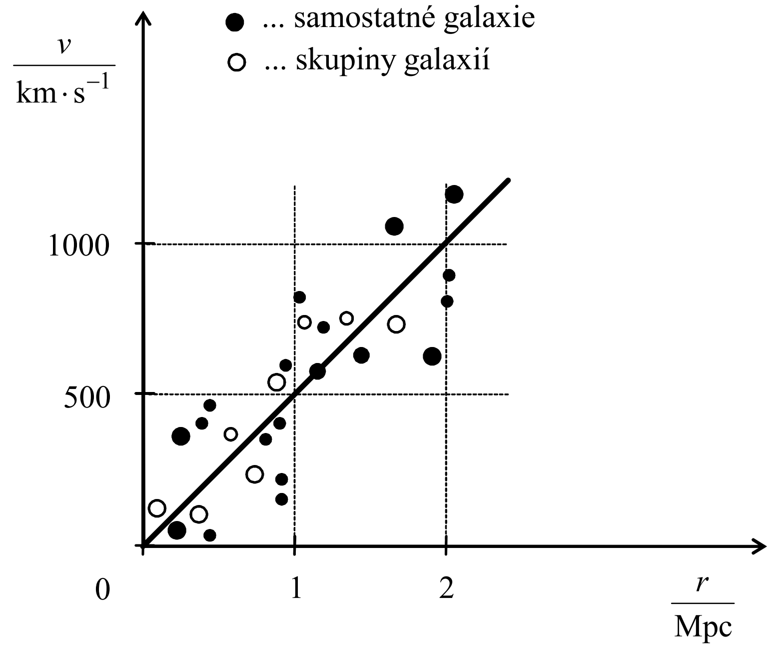
Označení hvězd B a K určuje jejich spektrální třídu.

d) Vysvětlete, proč se hvězda K musí stát červeným obrem.

Hvězdné velikosti dvojhvězdy leží mezi hodnotami $m_1 = 3{,}75$ (hvězdy jsou obě pozorovatelné) a $m_2 = 3{,}89$ (hvězda K zakrývá hvězdu B). Zářivý výkon K je 7,3krát větší než zářivý výkon B.

e) Povrchové teploty hvězd jsou $T_K = 3{,}5 \cdot 10^3$ K a $T_B = 15 \cdot 10^3$ K; $R_B = 4{,}1 \cdot R_\odot$. Určete poloměr R_K jako násobek $R_\odot$.

f) Vysvětlete, proč největší hvězdnou velikost má dvojhvězda i v okamžiku, kdy B částečně zakrývá K.



2. Roku 1929 uveřejnil Hubble známý diagram (viz obr.). Popisuje lineární závislost, ačkoli je to málo patrné.

a) Určete z grafu průměrnou hodnotu Hubblovy konstanty a vypočtěte také přibližné stáří vesmíru v rocích. Z jakého předpokladu přitom musíme vycházet?

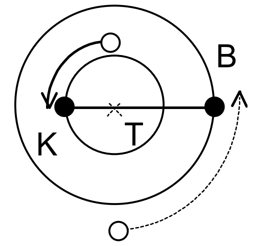
b) Na základě dalších poznatků docházíme k tomu, že rychlost rozpínání vesmíru se během času zpomaluje. Určete, jaký vliv má tato domněnka na číselnou hodnotu stáří vesmíru vypočtenou v úloze a).

c) Jiné metody, které vycházejí z Hubblova vztahu, dokazují, že stáří vesmíru je ve skutečnosti větší než hodnota určená v úloze a). Jmenujte některé takové metody a vysvětlete, na čem jsou založeny.

ŘEŠENÍ 6. SÉRIE

1.

a) Hvězdy jsou pořád v jedné přímce: $\omega_K = \omega_B$



b) V počáteční poloze žádný Dopplerův posuv ($v_r = 0$), největší Dopplerův posuv v konečných polohách ($v_t = 0$ a $v_r = \max$ $\Rightarrow$ K se přibližuje k Zemi $\Rightarrow$ modrý posuv a B se vzdaluje od Země $\Rightarrow$ rudý posuv);

z obrázku plyne: $\frac{r_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{K}}} = \frac{1,6}{1,2} \doteq 1,3 \Rightarrow \frac{r_{\mathrm{B}} \cdot \omega_{\mathrm{B}}}{r_{\mathrm{K}} \cdot \omega_{\mathrm{K}}} = 1,3 \Rightarrow \frac{v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{K}}} = 1,3$;

$$\frac{\Delta\lambda_{\mathrm{B}}}{\lambda_0} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{c} \text{ a } \frac{\Delta\lambda_{\mathrm{K}}}{\lambda_0} = \frac{v_{\mathrm{K}}}{c} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda_{\mathrm{B}}}{\Delta\lambda_{\mathrm{K}}} = \frac{v_{\mathrm{B}}}{v_{\mathrm{K}}} = 1,3$$

c) $F_{\mathrm{B}} = F_{\mathrm{K}} \Rightarrow M_{\mathrm{B}} \cdot r_{\mathrm{B}} \cdot \omega_{\mathrm{B}}^2 = M_{\mathrm{K}} \cdot r_{\mathrm{K}} \cdot \omega_{\mathrm{K}}^2 \Rightarrow M_{\mathrm{B}} = M_{\mathrm{K}} \cdot \frac{r_{\mathrm{K}}}{r_{\mathrm{B}}} \doteq 6 \cdot M_{\odot}$

e) $L_{\mathrm{K}} = 4 \cdot \pi \cdot R_{\mathrm{K}}^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{K}}^4$. $L_{\mathrm{B}} = 4 \cdot \pi \cdot R_{\mathrm{B}}^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{B}}^4$ (Stefanův–Boltzmannův zákon) $\Rightarrow$

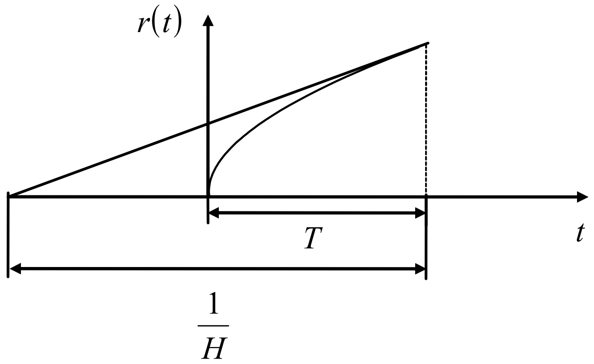
$$\left(\frac{R_{\mathrm{K}}}{R_{\mathrm{B}}}\right)^2 = \frac{L_{\mathrm{K}}}{L_{\mathrm{B}}} \cdot \left(\frac{T_{\mathrm{B}}}{T_{\mathrm{K}}}\right)^4 \Rightarrow \frac{R_{\mathrm{K}}}{R_{\mathrm{B}}} \doteq 50 \Rightarrow R_{\mathrm{K}} \doteq 200 \cdot R_{\odot}$$

f) $R_{\mathrm{B}} = 4,1 \cdot R_{\odot}$, $R_{\mathrm{K}} = 200 \cdot R_{\odot} \Rightarrow \frac{\pi \cdot R_{\mathrm{B}}^2}{\pi \cdot R_{\mathrm{K}}^2} \doteq 0,04\,\%$, podíl hvězdy K na zářivém výkonu dvojhvězdy je zanedbatelný.

2.

a) $H = \frac{v}{r} \doteq 500 \frac{\mathrm{km \cdot s^{-1}}}{\mathrm{Mpc}}$, $T = \frac{1}{H} \doteq 2 \cdot 10^9$ r (expanze vesmíru konstantní rychlostí)

b) $T < \frac{1}{H}$



c) radioaktivní rozpad hornin (U $\rightarrow$ Pb) na Zemi dokazuje, že stáří Země je asi $4,5 \cdot 10^9$ r $\Rightarrow$ stáří vesmíru musí být větší než $2 \cdot 10^9$ r.