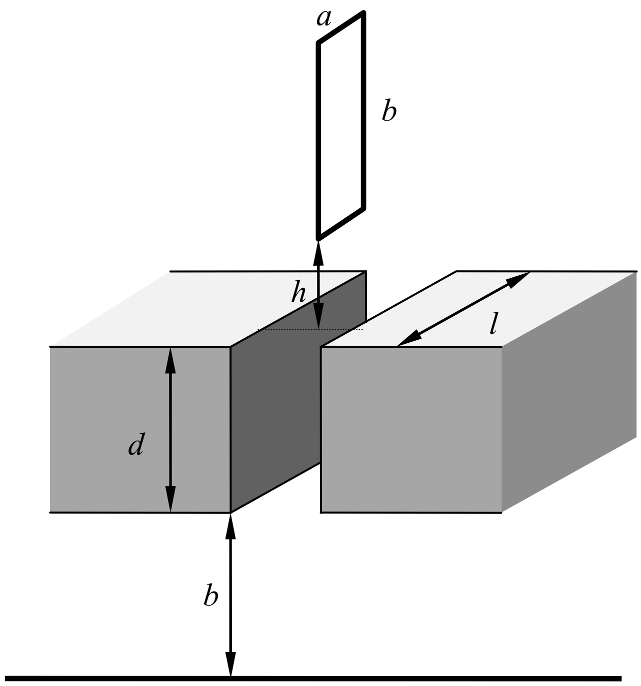
Pád vodivého rámečku v magnetickém poli

Karel Rauner, *Pedagogická fakulta ZČU v Plzni*

Příklad:

Obdélníkový rámeček z vodivého drátu má rozměry a, b, hmotnost m a odpor R. Je zavěšen ve výšce h nad horním okrajem pólových nástavců elektromagnetu. Pólové nástavce mají výšku d, pro kterou platí $d < b$, a šířku l: ($l > a$). Vzdálenost mezi pólovými nástavci je tak malá, že magnetické pole mezi nimi lze považovat za homogenní a bezrozptylové s magnetickou indukcí B. Spodní okraj pólových nástavců je ve výšce b nad podložkou – obr. 1. V čase $t = 0$ rámeček uvolníme. Vyjádřete časovou závislost polohy a rychlosti rámečku do okamžiku, ve kterém protne spodní strana rámečku rovinu určenou spodními okraji pólových nástavců, pak popište další pohyb rámečku slovně. Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $a = 10\ \mathrm{cm}$, $b = 1\ \mathrm{m}$, $m = 0{,}01\ \mathrm{kg}$, $R = 0{,}1\ \Omega$, $h = 0{,}2\ \mathrm{m}$, $d = 0{,}2\ \mathrm{m}$, $B = 1\ \mathrm{T}$. Rámeček považujte za nedeformovatelný. Určete číselně hodnotu energie, která se indukovaným proudem v rámečku přemění na teplo a porovnejte tuto hodnotu s bilancí mechanické energie rámečku.



Obr. 1

Řešení:

Označíme okamžitou polohu rámečku souřadnicí x popisující jeho vzdálenost od původní polohy. V čase $t = 0$ je $x = 0$, $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Řešení je nutné rozdělit do několika kroků:

1. Do jistého okamžiku t_1 padá rámeček volným pádem. Proto pro $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ platí:

* rauner@kof.zcu.cz

$$x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2, \quad v = g \cdot t. \tag{1}$$

Ze vztahů (1) lze určit okamžik t_1, ve kterém rámeček vstupuje do magnetického pole i rychlost, se kterou tam vstupuje:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}, \quad v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}\,. \tag{2}$$

2. V časovém intervalu $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ prochází magnetickým polem spodní strana rámečku. V této části se indukuje elektromotorické napětí $U_e = B \cdot v \cdot a$, které vyvolá v rámečku proud $I = \frac{U_e}{R}$. Na spodní stranu rámečku bude proto působit síla $F = -B \cdot I \cdot a$, jejíž záporné znaménko označuje působení proti gravitační síle. Po dosazení z předchozích vztahů je

$$F = -\frac{B^2 \cdot a^2}{R} \cdot v \tag{3}$$

Pro zrychlení rámečku $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}$ (protože řešený děj začíná časem $t = t_1$, zavedeme novou časovou proměnnou $\tau = t - t_1$) proto platí

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{B^2 \cdot a^2}{R} \cdot v + m \cdot g\,. \tag{4}$$

Řešíme nejprve homogenní rovnici (rovnici, ve které je vynechán člen nezávisející na rychlosti a čase) $m \cdot \frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{B^2 \cdot a^2}{R} \cdot v_h$. Separací proměnných dostaneme rovnici $\frac{\mathrm{d}v_h}{v_h} = -\frac{B^2 \cdot a^2}{m \cdot R} \cdot \mathrm{d}\tau$, kterou je již možné integrovat:

$$v_h = K \cdot \mathrm{e}^{-f \cdot \tau}, \tag{5}$$

kde je pro stručnost zavedeno označení $f = \frac{B^2 \cdot a^2}{m \cdot R}$.

Partikulárním řešením (jedním z možných řešení s členem $m \cdot g$) rovnice (4) je na první pohled konstanta $v_p = \frac{g}{f}$. To je také minimální rychlost, se kterou by rámeček padal rovnoměrným pohybem v případě velmi vysokých hodnot d a b. Konstantu K určíme z počáteční podmínky: $t = t_1 \left(\tau = 0\right) \quad \Rightarrow \quad v = v_h + v_p = v_1$:

$K = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} - \frac{g}{f}$, celkové řešení je po dosazení za τ proto:

$$v = \left(\sqrt{2 \cdot g \cdot h} - \frac{g}{f}\right) \cdot \mathrm{e}^{-f \cdot (t - t_1)} + \frac{g}{f}\,. \tag{6}$$

Další integrací dostaneme časovou závislost souřadnice *x*:

$$x = \left(\frac{g}{f^2} - \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{f} \right) \cdot \mathrm{e}^{-f \cdot (t - t_1)} + \frac{g}{f}(t - t_1) + X .$$

Konstantu *X* určíme z počáteční podmínky: $t = t_1 \Rightarrow x = l$, pak

$$x = \left(\frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{f} - \frac{g}{f^2} \right)\left(1 - \mathrm{e}^{-f \cdot (t - t_1)}\right) + \frac{g}{f}(t - t_1) + h . \tag{7}$$

Tato fáze pohybu skončí v čase t_2, při kterém $x_2 = h + d$. Analytické vyjádření tohoto časového okamžiku je obtížné, výhodnější je nalézt jeho hodnotu pro zadané číselné údaje.

3. Označíme časem t_3 okamžik, ve kterém vstupuje do magnetického pole horní strana rámečku. V časovém intervalu $t \in \langle t_2, t_3 \rangle$ padá rámeček opět volným pádem, v žádné části rámečku se neindukuje napětí, proud rámečkem je nulový. Je-li v_2 rychlostí vypočítanou ze vztahu (6) pro čas t_2, je další závislost rychlosti rámečku dána vztahem

$$v = v_2 + g \cdot (t - t_2) \tag{8}$$

a souřadnice

$$x = h + d + v_2(t - t_2) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_2)^2 . \tag{9}$$

Čas t_3 je určen vztahem (9) pro hodnotu $x_3 = h + b$. Odpovídající rychlost je $v_3 = v_2 + g \cdot (t_3 - t_2)$.

4. V poslední fázi pohybu prochází magnetickým polem horní strana rámečku a situace je obdobná druhému bodu řešení. Proto v intervalu $t \in \langle t_3, t_4 \rangle$, kde t_4 je okamžik dopadu rámečku na podložku, jsou hledaným řešením vztahy:

$$v = \left(v_3 - \frac{g}{f} \right) \cdot \mathrm{e}^{-f \cdot (t - t_3)} + \frac{g}{f} , \tag{10}$$

$$x = \left(\frac{v_3}{f} - \frac{g}{f^2} \right)\left(1 - \mathrm{e}^{-f \cdot (t - t_3)}\right) + \frac{g}{f}(t - t_3) + h + b . \tag{11}$$

Rámeček dopadne na podložku v čase t_4, pro který bude ve vztahu (11) *x* rovno $h + d + b$.

Číselné řešení

Pro zadané hodnoty je ze vztahů (2) $t_1 = 0{,}2$ s, $v_1 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Hledanými závislostmi v časovém intervalu $t \in \langle 0\ \mathrm{s}, 0{,}2\ \mathrm{s} \rangle$ jsou po dosazení do (1) $\left(g = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \right)$ vztahy:

$$\{v\} = 10 \cdot \{t\}, \quad \{x\} = 5 \cdot \{t\}^2 . \tag{12}$$

V další fázi pohybu získáme ze vztahů (6) a (7):

$$\{v\} = 1 + \mathrm{e}^{-10\cdot(\{t\}-0,2)}, \quad \{x\} = 0,1 + \{t\} - 0,1\cdot\mathrm{e}^{-10\cdot(\{t\}-0,2)}. \tag{13}$$

Numerickým řešením poslední rovnice pro $\{x\} = 0,4$ je čas $t_2 = 0,328\ \mathrm{s}$. Z této hodnoty získáme $v_2 = 1,28\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vztahy (13) jsou proto hledaným řešením v časovém intervalu $t \in \langle 0,2\ \mathrm{s}, 0,328\ \mathrm{s}\rangle$.

Ve třetí fázi pohybu jsou hledanými závislostmi vztahy (8), (9), které po dosazení nabývají tvaru:

$$\{x\} = 5\cdot\{t\}^2 - 2\cdot\{t\} + 0,518. \tag{14}$$

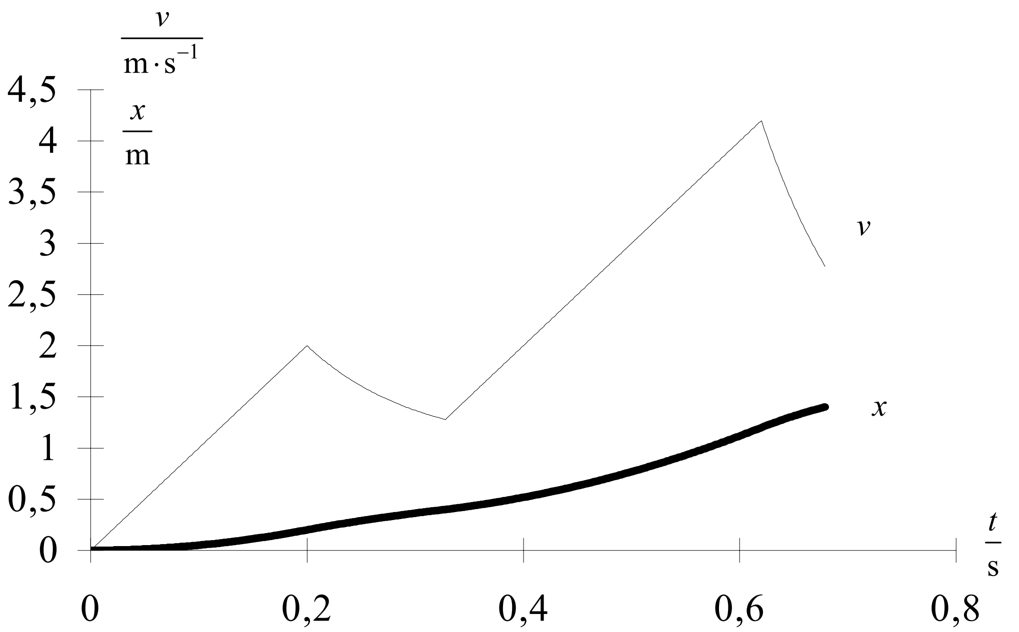
Z poslední rovnice lze řešením kvadratické rovnice pro $\{x\} = 1,2$ získat časový okamžik $t_3 = 0,620\ \mathrm{s}$. Vztahy (14) jsou proto hledaným řešením v intervalu $t \in \langle 0,328\ \mathrm{s}, 0,620\ \mathrm{s}\rangle$. Konec rámečku vstupuje do magnetického pole rychlostí $v_3 = 4,20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Pro poslední fázi pohybu jsou řešením vztahy (10), (11), které po dosazení mají tvar

$$\{v\} = 1 + 3,20\cdot\mathrm{e}^{-10\cdot(\{t\}-0,62)}, \quad \{x\} = 0,9 + \{t\} - 0,32\cdot\mathrm{e}^{-10\cdot(\{t\}-0,62)}. \tag{15}$$

Z posledního vztahu je možné získat $t_4 = 0,679\ \mathrm{s}$. Znamená to, že vztahy (15) jsou hledaným číselným řešením v časovém intervalu $t \in \langle 0,620\ \mathrm{s}, 0,679\ \mathrm{s}\rangle$. Rámeček dopadne na podložku rychlostí $v_4 = 2,77\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Výsledné řešení znázorňuje graf na obr. 2 sdružující všechny uvedené číselné závislosti.



Obr. 2

Příkon rámečku dodávaný indukovaným napětím v 2. a 4. fázi pohybu je dán výrazem $\frac{U_e^2}{R} = \frac{\left(B \cdot a \cdot v\right)^2}{R}$. Ve zbývajících částech pohybu se v rámečku žádné napětí neindukuje. V teplo se proto přemění celková energie

$$E = \frac{\left(B \cdot a\right)^2}{R} \cdot \left[\int_{t_1}^{t_2} v^2 \cdot \mathrm{d}t + \int_{t_3}^{t_4} v^2 \cdot \mathrm{d}t \right]. \tag{16}$$

Do prvního integrálu dosadíme k číselnému řešení rychlost ze vztahů (13), do druhého integrálu ze vztahů (15):

$$\{E\} = 0{,}1 \cdot \left\{ \int_{0,2}^{0,328} \left[1 + \mathrm{e}^{-10 \cdot (t - 0{,}2)} \right]^2 \cdot \mathrm{d}t + \int_{0,620}^{0,679} \left[1 + 3{,}2 \cdot \mathrm{e}^{-10 \cdot (t - 0{,}62)} \right]^2 \cdot \mathrm{d}t \right\}. \tag{17}$$

Po jednoduchém výpočtu získáme $E = 0{,}102$ J . Kdyby rámeček nepadal v magnetickém poli, musela by jeho kinetická energie při dopadu být rovna potenciální energii v počáteční výšce: $E_1 = m \cdot g \cdot \left(h + d + b\right)$, což je číselně 0,14 J. Protože po průchodu magnetickým polem dopadá rámeček s nižší rychlostí, bude jeho kinetická energie při dopadu $E_2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_4^2$, což je číselně 0,038 J. Získaný výsledek můžeme považovat za kontrolu správnosti řešení, protože platí zákon zachování energie: $E_1 = E + E_2$. Při hledání odpovědi na otázku ze zadání jsme samozřejmě mohli postupovat jednodušším postupem, který by vycházel přímo ze zákona zachování energie. Vyhnuli bychom se sice pracné integraci, neprovedli bychom však kontrolu správnosti řešení.

Literatura

[1] Ungermann Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh*. SPN, Praha 1990.