Ráz částic principem relativity[1]

Jan Obdržálek, Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha*

Článek řeší jasně a velmi jednoduše klasickou srážku dvou částic prostřednictvím těžišťové soustavy. Problematika je ilustrována dvouminutovým multimediálním programem, který je zájemcům k dispozici ke stažení [2].

O CO JDE

Dvě částice se srazí. Známe jejich hmotnosti *m*, *M* a rychlosti $\vec{v}_a$, $\vec{V}_a$ před srážkou v obecné inerciální soustavě $\mathcal{L}$ (laboratorní soustava); hledáme rychlosti $\vec{v}_z$, $\vec{V}_z$ po srážce. Je to standardní úloha, viz např. [1]. Ale když už máme za sebou ten Světový rok fyziky 2005, tak si pomůžeme principem relativity[2]: místo složitého počítání ze zákonů zachování energie a hybnosti v $\mathcal{L}$ výsledek v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$ snadno uhodneme. V ní budeme odpovídající rychlosti namísto *v* značit *u*. (V multimediálním prográmku [2], který novou metodu názorně ilustruje, se místo *u* používá červené *v*.)

Napíšeme-li zákon zachování hybnosti a energie

$$m \cdot \vec{v}_a + M \cdot \vec{V}_a = m \cdot \vec{v}_z + M \cdot \vec{V}_z$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M \cdot V_a^2 = \tfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_z^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M \cdot V_z^2 ,$$

vidíme ihned jedno řešení: $\vec{v}_z = \vec{v}_a$, $\vec{V}_z = \vec{V}_a$. (Má mj. roztomilou interpretaci: částice se nestrefily…) Druhá rovnice je kvadratická, očekáváme proto ještě jedno řešení. Analogické řešení $\vec{v}_z = -\vec{v}_a$, $\vec{V}_z = -\vec{V}_a$ jí sice vyhovuje, nevyhovuje však první rovnici, protože mění znamínko pravé strany. Co s tím?

Jsme-li samouci, vyjádříme z první rovnice $\vec{V}_z$ pomocí $\vec{v}_z$ a dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme kvadratickou rovnici pro $\vec{v}_z$, a tu vyřešíme podle vzorce. Protože jde o případ jednorozměrný, můžeme si ušetřit vektorový zápis. Řešení je jasné, ale dost nepříjemné a zdlouhavé, snadno uděláme chybu. (Lze to za trest uložit dobrému, ale nepozornému žákovi…)

Ve škole nás naučili chytrou věc: převedeme v obou rovnicích na levou stranu proměnné týkající se jedné částice, na pravou proměnné týkající se druhé částice, a pak druhou rovnici vydělíme první. Hned se to zjednoduší. (Ale jak na to proboha přišli?)

Teď si ukážeme, že přechodem do těžišťové soustavy $\mathcal{T}$ se úloha takřka vyřeší sama: v první z rovnic jsou obě strany rovny nule, takže změna znamínka při volbě $\vec{v}_z = -\vec{v}_a$, $\vec{V}_z = -\vec{V}_a$ nyní nevadí – a máme řešení nalezeno!

V těžišťové soustavě $\mathcal{T}$ umíme dokonce stejně snadno vyřešit i složitější případy:

- srážku nejen po přímce, ale i v prostoru, kdy první částice letící původně směrem $\vec{e}$ (řekněme po ose *x*) letí po srážce v jiném směru $\vec{E}$;
- srážku částečně pružnou ($0 < \alpha < 1$) či nepružnou ($\alpha = 0$).

Ale o tom až v dodatku.

[1] Práce vznikla v rámci grantu FRVŠ 1832/2004.

* jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

[2] Tedy, stačí nám Galileiho princip relativity.

DŮKAZ

Vzpomeňme nyní i *našeho* velikána, Járu Cimrmana, a jako on učiňme úkrok stranou: do těžišťové soustavy $\mathcal{T}$, na kterou se nás nikdo neptal. A hned několik tvrzení:

Tvrzení 1: Částice mají vzájemnou rychlost v_{rel} stejnou jak v laboratorní soustavě $\mathcal{L}$, tak v těžišťové soustavě $\mathcal{T}$.

To je zřejmé: zatímco hodnoty rychlostí závisí na volbě vztažné soustavy, velikost jejich rozdílu na volbě vztažné soustavy nezávisí (v nerelativistické fyzice).

Tvrzení 2: Částice letí v $\mathcal{T}$ proti sobě, a to s rychlostmi co do velikostí převrácenými ke svým hmotnostem.

Lidsky řečeno: je-li druhá částice třikrát lehčí než první, bude její rychlost v $\mathcal{T}$ třikrát větší než rychlost první částice, a ještě bude mít opačný směr (částice letí proti sobě).

Důkaz je samozřejmý, vzpomeneme-li si na obecnou definici rychlosti $\vec{w}$ těžiště platnou v libovolné vztažné soustavě:

$$\vec{w} = \frac{m \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{V}}{m + M}.$$

Značme v $\mathcal{T}$ rychlosti písmenem u namísto v z laboratorní soustavy. (V [2] jsou značeny červeným v, ale to by bylo pro černobílou publikaci dost nešikovné.) Protože v soustavě $\mathcal{T}$ těžiště stojí a je tedy $\vec{w}_{\mathcal{T}} = 0$, platí

$$m \cdot \vec{u} + M \cdot \vec{U} = 0,$$

takže vektory $\vec{u}$, $\vec{U}$ mají opačné směry a můžeme je porovnat:

$$\vec{u} : \vec{U} = -m : M ,$$

a to jak pro rychlosti před srážkou, tak i po srážce.

Tvrzení 3: V $\mathcal{T}$ má každá částice po pružné srážce rychlost stejně velkou, jakou měla před srážkou, ale s opačným směrem.

Při *každé* srážce se zachovává celková hybnost soustavy, a ta je v $\mathcal{T}$ nulová. Změna znamínek u obou rychlostí způsobená srážkou (neboli změna orientace rychlostí) ovšem tuto nulu nezmění. Při pružné srážce se navíc zachovává energie. Ta však závisí jen na u^2 a změnou znamínka u se proto taky nezmění. Máme tedy vedle nezajímavého řešení s nezměněnými rychlostmi konečně druhé řešení

$$\vec{u}_z = -\vec{u}_a,$$
$$\vec{U}_z = -\vec{U}_a.$$

Jistě uznáte, že jednodušeji už to nejde.

A tím jsme hotovi! Už známe v $\mathcal{T}$ rychlosti $\vec{u}_z$, $\vec{U}_z$ po srážce – a jediné, co zbývá, je převést je prostým přičtením rychlosti těžiště $\vec{w} \equiv \vec{w}_{\mathcal{L}}$ zpátky[3] do $\mathcal{L}$:

$$\vec{v}_z = \vec{u}_z + \vec{w},$$
$$\vec{V}_z = \vec{U}_z + \vec{w}.$$

Jednoduché – a logické! A teď rychle příklad, abychom detailně popsali metodiku:

[3] Cimrmanův úkrok zpátky…

PŘÍKLAD

25gramová částice s rychlostí 80 $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ se čelně srazí s 15gramovou částicí s rychlostí 40 $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$ v protisměru. Jaké budou mít částice rychlosti po srážce?

Krok 1: Napíšeme tabulku se třemi řádky (nadpisy, rychlosti v $\mathcal{L}$, rychlosti v $\mathcal{T}$) a se 7 sloupci; číselné nadepíšeme v_a, V_a, v_{rel}, w, v_z, V_z. (Dolní řádce pochopitelně odpovídají *u* namísto *v*.) Byl-li pohyb podél osy *x*, pak zapisujeme do tabulky *x*-ové souřadnice, a proto nepíšeme šipky. Všechny veličiny mají stejnou jednotku (zde $\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$); pro přehlednost ji také nepíšeme.

Zapíšeme ihned to, co známe: v_a, V_a, a vypočteme $v_{\text{rel}} = u_{\text{rel}} = v_a - V_a$.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	**80**	**–40**	**120**			
$\mathcal{T}(u)$			**120**	**0**		

S výpočtem $w_{\mathcal{L}}$ se nenamáháme; vyjde nám samo. V dolní řádce je $w_{\mathcal{T}} = 0$, je to těžišťová soustava.

Krok 2: Vzájemnou rychlost $v_{\text{rel}} = 120$ rozdělíme v převráceném poměru hmotností, tedy v poměru $15:25$. Protože $15+25=40$, dostaneme $u_a = 15\cdot\frac{120}{40} = 45$ a $U_a = -25\cdot\frac{120}{40} = -75$. Tabulka teď vypadá takto:

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	80	–40	120			
$\mathcal{T}(u)$	**45**	**–75**	120	0		

Krok 3: Nyní doplníme hodnoty $u_z = -u_a$ a $U_z = -U_a$.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	80	–40	120			
$\mathcal{T}(u)$	45	–75	120	0	**–45**	**+75**

Všimněme si, že vždy je u_a kladné a U_a záporné, a naopak u_z záporné a U_z kladné!

Krok 4: Teď teprve doplníme $w_{\mathcal{L}}$ jako rozdíl hodnot $v_a - u_a$ z prvního sloupce (zde tedy +35); samozřejmě bude týž jako ze druhého sloupečku $V_a - U_a$. A teď už zbývá jen doplnit v_z a V_z prostým přičtením „zezdola nahoru" téže hodnoty, tedy $w_{\mathcal{L}}$. Tím je tabulka hotova a úloha vyřešena. Pro kontrolu: ve sloupci v_{rel} je v obou řádcích táž hodnota, ve všech ostatních je horní řádek o $w_{\mathcal{L}}$ větší než spodní.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	80	–40	120	**35**	**–10**	**110**
$\mathcal{T}(u)$	45	–75	120	0	–45	+75

Není to hezoučké a jednoduché?

DODATEK

Právě jsme vyřešili pružný jednorozměrný ráz. Ukážeme, že stejně jednoduchým postupem můžeme vyřešit i složitější úlohy – tak, jak jsme to na začátku slíbili.

Ráz částic v prostoru

Předpokládejme, že částice původně letěly podél osy x s jednotkovým vektorem $\vec{e}$, a že po srážce letí první částice obecně v jiném, daném směru $\vec{E}$. Pak už nám nebude stačit tabulka s prostým číslem – složkou do osy x (pro puntičkáře: s jednorozměrným vektorem značeným proto bez šipky), ale musíme *vše* psát vektorově. Rychlosti $\vec{u}_z$, $\vec{U}_z$ ze 3. kroku budou opět číselně stejné, ale budou znamenat hodnotu složky ve směru $\vec{E}$, a neměníme proto znamínko (to už obstaral směr vektoru $\vec{E}$ vůči $\vec{e}$). K nim se přičte ve 4. kroku složka $\vec{w}_{\mathcal{L}}$ stejná jako dříve, tj. ve směru osy x. Tabulka teď bude mít naprosto logický tvar

	$\vec{v}_a$	$\vec{V}_a$	$\vec{v}_{\text{rel}}$	$\vec{w}$	$\vec{v}_z$	$\vec{V}_z$
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$45\vec{E}+35\vec{e}$	$-75\vec{E}+35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$45\vec{E}$	$-75\vec{E}$

(Pečlivý čtenář jistě ocení, že nyní, ve 3D, již sloupce šipky nad symboly mají.)

Ráz částečně pružný

Ten je charakterizován *součinitelem restituce* α, udávajícím poměr vzájemných rychlostí po srážce a před ní: $\alpha = \dfrac{|\vec{v}_z - \vec{V}_z|}{|\vec{v}_a - \vec{V}_a|} = \dfrac{|\vec{u}_z - \vec{U}_z|}{|\vec{u}_a - \vec{U}_a|}$.

To už dává návod k řešení: při kroku 3 zapíšeme jako výsledné rychlosti nikoli $\vec{u}_z = -\vec{u}_a$, resp. $\vec{U}_z = -\vec{U}_a$, ale rychlosti přiměřeně zmenšené, tedy $\vec{u}_z = -\alpha \cdot \vec{u}_a$, resp. $\vec{U}_z = -\alpha \cdot \vec{U}_a$. Je-li tedy např. součinitel restituce $\alpha = \frac{3}{5}$, bude mít tabulka tvar

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	80	–40	120	35	8	80
$\mathcal{T}(u)$	45	–75	120	0	–27	+45

	$\vec{v}_a$	$\vec{V}_a$	$\vec{v}_{\text{rel}}$	$\vec{w}$	$\vec{v}_z$	$\vec{V}_z$
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$27\vec{E}+35\vec{e}$	$-45\vec{E}+35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$27\vec{E}$	$-45\vec{E}$

Při ***nepružném*** rázu je $\alpha = 0$; obě částice tedy zůstanou stát v těžišti a $\vec{u}_z = \vec{U}_z = \vec{0}$. V původní (laboratorní) soustavě se tedy společně pohybují rychlostí těžiště $\vec{w}_{\mathcal{L}}$ a tabulka se zjednoduší takto:

	$\vec{v}_a$	$\vec{V}_a$	$\vec{v}_{\text{rel}}$	$\vec{w}$	$\vec{v}_z$	$\vec{V}_z$
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$35\vec{e}$	$35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$

LITERATURA

[1] Halliday D. a kol.: *Fyzika.* VUTIUM Brno, Prometheus Praha, 2000.

[2] < http://utf.mff.cuni.cz/~jobdr/> *J. Obdržálek* (česky), soubor raz.zip (3,4 MB).