

Ráz částic principem relativity¹

Jan Obdržálek*, Matematicko-fyzikální fakulta UK Praha

Článek řeší jasně a velmi jednoduše klasickou srážku dvou částic prostřednictvím těžišťové soustavy. Problematika je ilustrována dvouminutovým multimediálním programem, který je zájemcům k dispozici ke stažení [2].

O CO JDE

Dvě částice se srazí. Známe jejich hmotnosti m , M a rychlosti \vec{v}_a , \vec{V}_a před srážkou v obecné inerciální soustavě \mathcal{L} (laboratorní soustava); hledáme rychlosti \vec{v}_z , \vec{V}_z po srážce. Je to standardní úloha, viz např. [1]. Ale když už máme za sebou ten Světový rok fyziky 2005, tak si pomůžeme principem relativity²: místo složitějšího počítání ze zákonů zachování energie a hybnosti v \mathcal{L} výsledek v těžišťové soustavě \mathcal{T} snadno uhadneme. V ní budeme odpovídající rychlosti namísto v značit u . (V multimediálním programu [2], který novou metodu názorně ilustruje, se místo u používá červené v .)

Napišeme-li zákon zachování hybnosti a energie

$$m \cdot \vec{v}_a + M \cdot \vec{V}_a = m \cdot \vec{v}_z + M \cdot \vec{V}_z$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_a^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_a^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_z^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_z^2,$$

vidíme ihned jedno řešení: $\vec{v}_z = \vec{v}_a$, $\vec{V}_z = \vec{V}_a$. (Má mj. roztomilou interpretaci: částice se nestrefily...) Druhá rovnice je kvadratická, očekáváme proto ještě jedno řešení. Analogické řešení $\vec{v}_z = -\vec{v}_a$, $\vec{V}_z = -\vec{V}_a$ jí sice vyhovuje, nevyhovuje však první rovnici, protože mění znamínko pravé strany. Co s tím?

Jsme-li samouci, vyjádříme z první rovnice \vec{V}_z pomocí \vec{v}_z a dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme kvadratickou rovnici pro \vec{v}_z , a tu vyřešíme podle vzorce. Protože jde o případ jednorozměrný, můžeme si ušetřit vektorový zápis. Řešení je jasné, ale dost nepříjemné a zdouhavé, snadno uděláme chybu. (Lze to za trest uložit dobrému, ale nepozornému žákovi...)

Ve škole nás naučili chytrou věc: převedeme v obou rovnicích na levou stranu proměnné týkající se jedné částice, na pravou proměnné týkající se druhé částice, a pak druhou rovnici vydělíme první. Hned se to zjednoduší. (Ale jak na to proboha přišli?)

Tedy si ukážeme, že přechodem do těžišťové soustavy \mathcal{T} se úloha takřka vyřeší sama: v první z rovnic jsou obě strany rovny nule, takže změna znamínka při volbě $\vec{v}_z = -\vec{v}_a$, $\vec{V}_z = -\vec{V}_a$ nyní nevadí – a máme řešení nalezeno!

V těžišťové soustavě \mathcal{T} umíme dokonce stejně snadno vyřešit i složitější případy:

- srážku nejen po přímce, ale i v prostoru, kdy první částice letící původně směrem \vec{e} (řekněme po ose x) letí po srážce v jiném směru \vec{E} ;
- srážku částečně pružnou ($0 < \alpha < 1$) či nepružnou ($\alpha = 0$).

Ale o tom až v dodatku.

¹ Práce vznikla v rámci grantu FRVŠ 1832/2004.

* jan.obdrzalek@mff.cuni.cz

² Tedy, stačí nám Galileiho princip relativity.

DŮKAZ

Vzpomeňme nyní i *našeho* velikána, Járu Cimrmana, a jako on učiňme úkrok stranou: do těžišťové soustavy \mathcal{T} , na kterou se nás nikdo neptal. A hned několik tvrzení:

Tvrzení 1: Částice mají vzájemnou rychlost v_{rel} stejnou jak v laboratorní soustavě \mathcal{L} , tak v těžišťové soustavě \mathcal{T} .

To je zřejmé: zatímco hodnoty rychlostí závisí na volbě vztažné soustavy, velikost jejich rozdílu na volbě vztažné soustavy nezávisí (v nerelativistické fyzice).

Tvrzení 2: Částice letí v \mathcal{T} proti sobě, a to s rychlostmi co do velikostí převrácenými ke svým hmotnostem.

Lidsky řečeno: je-li druhá částice třikrát lehčí než první, bude její rychlost v \mathcal{T} třikrát větší než rychlost první částice, a ještě bude mít opačný směr (částice letí proti sobě).

Důkaz je samozřejmý, vzpomeneme-li si na obecnou definici rychlosti \vec{w} těžiště platnou v libovolné vztažné soustavě:

$$\vec{w} = \frac{m \cdot \vec{v} + M \cdot \vec{V}}{m + M}.$$

Značme v \mathcal{T} rychlosti písmenem u namísto v z laboratorní soustavy. (V [2] jsou značeny červeným v , ale to by bylo pro černobílou publikaci dost nešikovné.) Protože v soustavě \mathcal{T} těžiště stojí a je tedy $\vec{w}_{\mathcal{T}} = 0$, platí

$$m \cdot \vec{u} + M \cdot \vec{U} = 0,$$

takže vektory \vec{u} , \vec{U} mají opačné směry a můžeme je porovnat:

$$\vec{u} : \vec{U} = -m : M,$$

a to jak pro rychlosti před srážkou, tak i po srážce.

Tvrzení 3: V \mathcal{T} má každá částice po pružné srážce rychlost stejně velkou, jakou měla před srážkou, ale s opačným směrem.

Při *každé* srážce se zachovává celková hybnost soustavy, a ta je v \mathcal{T} nulová. Změna znamének u obou rychlostí způsobená srážkou (neboli změna orientace rychlostí) ovšem tuto nulu nezmění. Při pružné srážce se navíc zachovává energie. Ta však závisí jen na u^2 a změnou znamínka u se proto taky nezmění. Máme tedy vedle nezajímavého řešení s nezměněnými rychlostmi konečně druhé řešení

$$\begin{aligned} \vec{u}_z &= -\vec{u}_a, \\ \vec{U}_z &= -\vec{U}_a. \end{aligned}$$

Jistě uznáte, že jednodušeji už to nejde.

A tím jsme hotovi! Už známe v \mathcal{T} rychlosti \vec{u}_z , \vec{U}_z po srážce – a jediné, co zbývá, je převést je prostým přičtením rychlosti těžiště $\vec{w} \equiv \vec{w}_{\mathcal{L}}$ zpátky³ do \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} \vec{v}_z &= \vec{u}_z + \vec{w}, \\ \vec{V}_z &= \vec{U}_z + \vec{w}. \end{aligned}$$

Jednoduché – a logické! A teď rychle příklad, abychom detailně popsali metodiku:

³ Cimrmanův úkrok zpátky...

PŘÍKLAD

25gramová částice s rychlostí $80 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ se čelně srazí s 15gramovou částicí s rychlostí $40 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ v protisměru. Jaké budou mít částice rychlosti po srážce?

Krok 1: Napišeme tabulku se třemi řádky (nadpisy, rychlosti v \mathcal{L} , rychlosti v \mathcal{T}) a se 7 sloupci; číselné nadepíšeme $v_a, V_a, v_{\text{rel}}, w, v_z, V_z$. (Dolní řádce pochopitelně odpovídají u namísto v .) Byl-li pohyb podél osy x , pak zapisujeme do tabulky x -ové souřadnice, a proto nepíšeme šipky. Všechny veličiny mají stejnou jednotku (zde $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$); pro přehlednost ji také nepíšeme.

Zapišeme ihned to, co známe: v_a, V_a , a vypočteme $v_{\text{rel}} = u_{\text{rel}} = v_a - V_a$.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L} (v)$	80	-40	120			
$\mathcal{T} (u)$			120	0		

S výpočtem $w_{\mathcal{L}}$ se nenamáháme; vyjde nám samo. V dolní řádce je $w_{\mathcal{T}} = 0$, je to těžišťová soustava.

Krok 2: Vzájemnou rychlost $v_{\text{rel}} = 120$ rozdělíme v převráceném poměru hmotností, tedy v poměru $15 : 25$. Protože $15 + 25 = 40$, dostaneme $u_a = 15 \cdot \frac{120}{40} = 45$ a $U_a = -25 \cdot \frac{120}{40} = -75$.

Tabulka teď vypadá takto:

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L} (v)$	80	-40	120			
$\mathcal{T} (u)$	45	-75	120	0		

Krok 3: Nyní doplníme hodnoty $u_z = -u_a$ a $U_z = -U_a$.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L} (v)$	80	-40	120			
$\mathcal{T} (u)$	45	-75	120	0	-45	+75

Všimněme si, že vždy je u_a kladné a U_a záporné, a naopak u_z záporné a U_z kladné!

Krok 4: Teď teprve doplníme $w_{\mathcal{L}}$ jako rozdíl hodnot $v_a - u_a$ z prvního sloupce (zde tedy +35); samozřejmě bude též jako ze druhého sloupečku $V_a - U_a$. A teď už zbývá jen doplnit v_z a V_z prostým přičtením „zezdola nahoru“ téže hodnoty, tedy $w_{\mathcal{L}}$. Tím je tabulka hotova a úloha vyřešena. Pro kontrolu: ve sloupci v_{rel} je v obou řádcích táž hodnota, ve všech ostatních je horní řádek o $w_{\mathcal{L}}$ větší než spodní.

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L} (v)$	80	-40	120	35	-10	110
$\mathcal{T} (u)$	45	-75	120	0	-45	+75

Není to hezoučké a jednoduché?

DODATEK

Právě jsme vyřešili pružný jednorozměrný ráz. Ukážeme, že stejně jednoduchým postupem můžeme vyřešit i složitější úlohy – tak, jak jsme to na začátku slíbili.

Ráz částic v prostoru

Předpokládejme, že částice původně letěly podél osy x s jednotkovým vektorem \vec{e} , a že po srážce letí první částice obecně v jiném, daném směru \vec{E} . Pak už nám nebude stačit tabulka s prostým číslem – složkou do osy x (pro puntičkáře: s jednorozměrným vektorem značeným proto bez šipky), ale musíme *vše* psát vektorově. Rychlosti \vec{u}_z, \vec{U}_z ze 3. kroku budou opět číselně stejné, ale budou znamenat hodnotu složky ve směru \vec{E} , a neměníme proto znamínko (to už obstaral směr vektoru \vec{E} vůči \vec{e}). K nim se přičte ve 4. kroku složka \vec{w}_L stejná jako dříve, tj. ve směru osy x . Tabulka teď bude mít naprosto logický tvar

	\vec{v}_a	\vec{V}_a	\vec{v}_{rel}	\vec{w}	\vec{v}_z	\vec{V}_z
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$45\vec{E}+35\vec{e}$	$-75\vec{E}+35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$45\vec{E}$	$-75\vec{E}$

(Pečlivý čtenář jistě ocení, že nyní, ve 3D, již sloupce šipky nad symboly mají.)

Ráz částečně pružný

Ten je charakterizován *součinitelem restituice* α , udávajícím poměr vzájemných rychlostí po srážce a před ní: $\alpha = \frac{|\vec{v}_z - \vec{V}_z|}{|\vec{v}_a - \vec{V}_a|} = \frac{|\vec{u}_z - \vec{U}_z|}{|\vec{u}_a - \vec{U}_a|}$.

To už dává návod k řešení: při kroku 3 zapíšeme jako výsledné rychlosti nikoli $\vec{u}_z = -\vec{u}_a$, resp. $\vec{U}_z = -\vec{U}_a$, ale rychlosti přiměřeně zmenšené, tedy $\vec{u}_z = -\alpha \cdot \vec{u}_a$, resp. $\vec{U}_z = -\alpha \cdot \vec{U}_a$. Je-li tedy např. součinitel restituice $\alpha = \frac{3}{5}$, bude mít tabulka tvar

	v_a	V_a	v_{rel}	w	v_z	V_z
$\mathcal{L}(v)$	80	-40	120	35	8	80
$\mathcal{T}(u)$	45	-75	120	0	-27	+45

	\vec{v}_a	\vec{V}_a	\vec{v}_{rel}	\vec{w}	\vec{v}_z	\vec{V}_z
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$27\vec{E}+35\vec{e}$	$-45\vec{E}+35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$27\vec{E}$	$-45\vec{E}$

Při *nepružném* rázu je $\alpha = 0$; obě částice tedy zůstanou stát v těžišti a $\vec{u}_z = \vec{U}_z = \vec{0}$. V původní (laboratorní) soustavě se tedy společně pohybují rychlostí těžiště \vec{w}_L a tabulka se zjednoduší takto:

	\vec{v}_a	\vec{V}_a	\vec{v}_{rel}	\vec{w}	\vec{v}_z	\vec{V}_z
$\mathcal{L}(v)$	$80\vec{e}$	$-40\vec{e}$	$120\vec{e}$	$35\vec{e}$	$35\vec{e}$	$35\vec{e}$
$\mathcal{T}(u)$	$45\vec{e}$	$-75\vec{e}$	$120\vec{e}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$

LITERATURA

- [1] Halliday D. a kol.: *Fyzika*. VUTIUM Brno, Prometheus Praha, 2000.
 [2] < <http://utf.mff.cuni.cz/~jobdr/> > *J. Obdržálek* (česky), soubor raz.zip (3,4 MB).