Třetí Keplerův zákon

Ota Kéhar[1], Hvězdárna v Rokycanech

Za základní fyzikální parametr nejrozšířenějších objektů ve vesmíru – hvězd – považujeme jejich hmotnost. Třetí Keplerův zákon je jedinou klasickou přímou metodou pro určení hmotnosti kosmických těles. Určení relativní hmotnosti Jupiteru vzhledem ke Slunci na základě údajů o oběhu měsíce Callisto provedl již Newton v Principiích. Téma třetího Keplerova zákona je zařazováno do tematického celku Gravitační pole. Pro určení hmotnosti je nutné se zaměřit na přesný tvar třetího Keplerova zákona, jehož zařazení (případně odvození z gravitačního zákona) by přispělo k prohloubení a upřesnění znalosti žáků o fyzikální podstatě pohybů v kosmickém prostoru.

Třetí Keplerův zákon ve škole

Žáci se mohou se třetím Keplerovým zákonem poprvé seznámit na druhém stupni základní školy, mnohem více prostoru mu je věnováno až na střední škole. Na základě výsledků dotazníkového šetření[2] uskutečněného mnou v roce 2012 mezi studenty univerzity různých ročníků a zaměření, žáky víceletého gymnázia a účastníky fyzikálního kempu vyšlo najevo, že si žáci odnášejí zákon ve formě vzorečku

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}\,. \tag{1}$$

Nebudu spekulovat, zda žáci či studenti správně chápou význam tohoto zákona: „*Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií.*“ (Bednařík, Široká. Fyzika pro gymnázia) I tak málokdo uvedl tento vztah ve správném tvaru. Mnohem důležitější by bylo uvedení podmínek, za kterých lze vztah (1) použít a v jakých jednotkách do něj dosazujeme. Hmotnosti planet musí být zanedbatelné oproti hmotnosti centrálního tělesa, vztah (1) platí pouze pro objekty obíhající okolo stejného tělesa a obvykle do něho dosazujeme čas v rocích a velkou poloosu v astronomických jednotkách[3], obě strany jsou bezrozměrné, stačí obecně dosazovat časy a délky ve stejných jednotkách. Keplerovy zákony ovšem platí nejen pro pohyby planet okolo Slunce, ale obecně pro každou gravitačně vázanou soustavu těles.

Třetí Keplerův zákon byl objeven v květnu 1618 a o rok později publikován v díle Harmonie světa (Harmonices Mundi). Kepler odvodil své zákony ze systematických a ve své době nejpřesnějších měření Tychona Brahe. Jednalo se původně o empirické vztahy. Až Newton v listopadu 1684 prezentoval souvislost gravitačního zákonu s Keplerovými zákony. V červenci 1687 pak dokázal, že Keplerovy zákony jsou důsledkem jeho obecnější teorie mechaniky a gravitace.

Ve svých hodinách používám jiný tvar třetího Keplerova zákona (odvozený z Newtonových zákonů), který řeší výše uvedené nevýhody.

Odvození třetího Keplerova zákona

Vyjdeme z předpokladu rovnosti velikosti setrvačné odstředivé síly F_o a gravitační síly F_g, kterou působí centrální těleso o hmotnosti M na těleso o hmotnosti m obíhající po kružnici ve vzdálenosti a.[4]

---

1 *kehar@kmt.zcu.cz*

2 *Koncem října 2012 došlo k dotazníkovému šetření mezi studenty Západočeské univerzity v Plzni se zájmem o astronomii. Nejčastěji to byli studenti 2. až 4. ročníku (celkem 85 %, každý ročník zhruba po 28 %). Největší zastoupení měla Fakulta pedagogická (28 %), následovaná Fakultou aplikovaných věd (20 %), Fakultou elektrotechnickou (17 %) a Fakultou ekonomickou (17 %). Ostatní fakulty měly méně než 9 %. Uvedu výsledky pouze jedné otázky, která souvisí s tématem tohoto článku a která zněla: „Uveďte vztah, který vyplývá z třetího Keplerova zákona.“ Správně odpovědělo pouze 16 % studentů: jedna odpověď byla slovní, zbývající byly vztahem $T_1^2/T_2^2 = a_1^3/a_2^3$. U 84 % špatných odpovědí nebylo většinou uvedeno nic, 2 studenti uvedli slovní odpověď, 3krát nevím, jedenkrát se objevily špatné mocniny ve vzorci a jednou c = 300 000 km/s. Na přelomu října a listopadu 2012 byli testováni žáci Gymnázia Plzeň na Mikulášském náměstí. Testování se účastnilo 50 žáků víceletého gymnázia ročníků odpovídajících 1. a 2. ročníku střední školy. Správně odpovědělo 6 % studentů (většinou uvedli vztah a^3/T^2 = konst., v jednom případě slovní vyjádření). Pro 94 % studentů byla odpověď špatná: 4krát poměr a/T, 3krát poměr T_1/T_2, 1krát slovní odpověď; většinou byly v uvedeném vztahu špatné exponenty).*

3 *XXVIII. valné shromáždění Mezinárodní astronomické unie konané v roce 2012 v Pekingu přijalo rezoluci B2 (předefinování délky astronomické jednotky), kde se v bodě 5 píše: unikátním symbolem pro astronomickou jednotku je „au“.*

4 *Na tomto místě bychom měli žáky a studenty upozornit na skutečnost, že používáme proměnnou a pro vzdálenost (nejdříve poloměr kružnice, později velká poloosa), nikoli pro zrychlení.*

$$F_g = F_o \Rightarrow \varkappa \cdot \frac{M \cdot m}{a^2} = \frac{m \cdot v^2}{a}, \tag{2}$$

kde $\varkappa$ je gravitační konstanta s hodnotou $6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

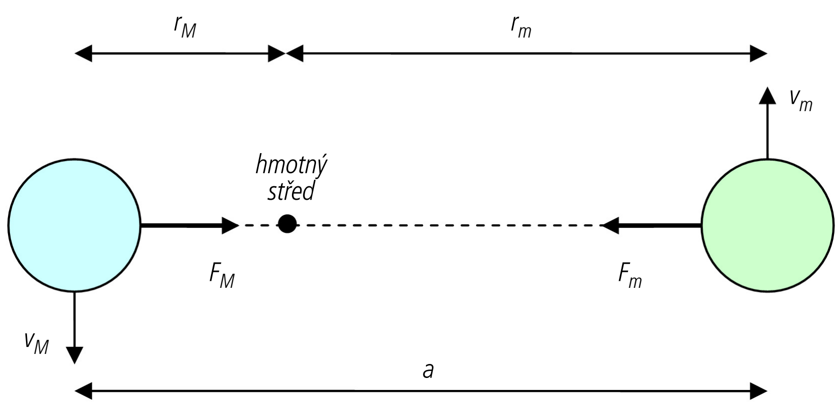
$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi \cdot a}{T} \tag{3}$$

Za rychlost v můžeme dosadit do (2) ze známého vztahu (3) pro průměrnou rychlost, kde dráha s bude délka kružnice o poloměru a a za čas doplníme oběžnou dobu T.

Po dosazení, zkrácení a snadné úpravě dostaneme

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa \cdot M}{4\pi^2}. \tag{4}$$

Pokud není možné zanedbat hmotnost obíhajícího tělesa m (např. pro dvojhvězdy), musíme použít následující úvahu při odvození třetího Keplerova zákona. Máme dvě tělesa o hmotnostech M a m, které obíhají okolo hmotného středu soustavy po kružnicích ve vzdálenostech r_M a r_m (viz obr. 1). Protože gravitační síla působí pouze na úsečce spojující středy obou těles, musí obě tělesa dokončit jeden oběh za stejnou dobu T (i když se pohybují různými rychlostmi v_M a v_m).



Obr. 1 – dvě tělesa obíhající okolo hmotného středu

Na každé těleso působí setrvačná odstředivá síla o velikosti

$$F_M = M \cdot \frac{v_M^2}{r_M} = 4\pi^2 \cdot M \cdot \frac{r_M}{T^2}, \tag{5a}$$

$$F_m = m \cdot \frac{v_m^2}{r_m} = 4\pi^2 \cdot m \cdot \frac{r_m}{T^2}. \tag{5b}$$

Třetí Newtonův pohybový zákon (zákon akce a reakce) říká, že $F_M = F_m$, z čehož plyne

$$M \cdot r_M = m \cdot r_m. \tag{6}$$

Ze vztahu (6) je zřejmé, že hmotnější těleso obíhá blíže k hmotnému středu než méně hmotné těleso. Celkovou vzdálenost obou těles lze napsat jako součet dílčích vzdáleností

$$a = r_M + r_m \tag{7}$$

a po úpravě dostaneme

$$r_m = \frac{M \cdot a}{M + m}. \tag{8}$$

Pokud vztah (8) dosadíme do (5b) a doplníme o gravitační zákon (2), kdy platí $F_g = F_m$, po jednoduché úpravě dostaneme třetí Keplerův zákon v Newtonově formě

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\varkappa}{4\pi^2}(M + m). \tag{9}$$

Praktické úlohy na třetí Keplerův zákon

I. úloha: Hmotnost Slunce vypočítáme z třetího Keplerova zákona při znalosti střední vzdálenosti Země – Slunce (přibližně rovna astronomické jednotce) a době oběhu Země okolo Slunce (siderický nebo též hvězdný rok).

$$T_{\text{Země}} = 1 \text{ rok} = 365{,}256\,363 \text{ dne} = 31\,556\,925 \text{ s}, \quad a_{\text{Země}} = 1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m}$$

Po dosazení do vzorce (4) nám při předpokladu zanedbatelné hmotnosti Země vyjde hmotnost Slunce $M_{\text{Slunce}} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg, což odpovídá tabulkové hodnotě.

Pokud do vzorce (4) dosadíme za $a = 149\,597\,870\,700$ m (jedna astronomická jednotka, zhruba odpovídá střední vzdálenosti Země−Slunce), $T = 365{,}256\,363 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s (počet sekund v siderickém roce) a za $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg (hmotnost Slunce), po zkrácení získáme[5]

$$\frac{a_{\text{au}}^3}{T_{\text{rok}}^2} = M_{\text{Slunci}}, \tag{10}$$

kde vzdálenost a dosazujeme v astronomických jednotkách, T v rocích a hmotnost M centrálního tělesa v násobcích hmotnosti Slunce.

II. úloha: Určete hmotnost planety Jupiter. Již v roce 1610 pozoroval Galileo Galilei čtyři nejjasnější měsíce planety Jupiter – Io, Europu, Ganymed a Callisto, viz obr. 2. Pozorným sledováním těchto měsíců můžeme určit jejich vzdálenost od Jupitera a změřit jejich oběžnou dobu. Úloha na první pohled snadná, ale její praktická realizace by nám přinesla nemálo komplikací. Použijeme tedy pro zjednodušení tabulkových hodnot[6]: velká poloosa a měsíce Ganymed je $1{,}07 \cdot 10^9$ m $= 7{,}2 \cdot 10^{-3}$ au. Oběžná doba T je 7,2 dne = 0,020 roku. Po dosazení do vzorce (10) vyjde hmotnost $9{,}5 \cdot 10^{-4}\, M_{\text{Slunci}} = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg. Hmotnost planety Jupiter[7] představuje necelé jedno promile hmotnosti Slunce. I z toho důvodu můžeme používat pro objekty (planety, planetky, komety) obíhající okolo Slunce upraveného vztahu (10).

Obr. 2 – planeta Jupiter a jeho čtyři největší měsíce;
zdroj: http://kepler.nasa.gov/images/SystemJupiterComparisonKOI961-glry.jpg

III. úloha: Určete hmotnost planety Mars. Okolo planety Mars obíhá malý měsíc Phobos (obr. 3). Průměrná vzdálenost měsíce od Marsu je 9 380 km $= 6{,}3 \cdot 10^{-5}$ au a oběžná doba 7 h 39 min $= 8{,}7 \cdot 10^{-4}$ roku. I v tomto případě lze hmotnost měsíce zanedbat, použijeme vztah (10) a hmotnost Marsu nám po přepočtu na jednotky SI vyjde $6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg.[8]

Obr. 3 – planeta Mars a dva měsíce Phobos (vlevo) a Deimos (vpravo). Vzdálenosti jsou v měřítku. Obrázek je složen ze dvou snímků.
zdroj: http://www.astro.cz/apod/ap031024.html

Takto můžeme postupovat i pro planety Saturn, Uran a Neptun, okolo kterých obíhá dostatečné množství větších či menších měsíců. Ve všech těchto případech můžeme jejich hmotnost vůči planetě zanedbat. Jiná situace je u vnitřních planet Merkur a Venuše, které měsíce nemají. U těchto planet nebyla hmotnost dlouho dobu známa s do-

---

5 *Stejný tvar třetího Keplerova zákona je uveden v učebnici Fyzika 9 od Nakladatelství Fraus na straně 110.*

6 *Např. na http://astronomia.zcu.cz/planety/jupiter/969-charakteristika-ganymedes. Velkou poloosu měsíce můžeme na obloze měřit jako násobek rovníkového poloměru planety (71 492 km), pro Ganymed je $a = 15\, R_J$.*

7 *Po Slunci druhý nejhmotnější objekt ve sluneční soustavě. Dle tabulkových hodnot je hmotnost Jupitera rovna $1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg.*

8 *Tabulková hodnota hmotnosti Marsu je $6{,}4 \cdot 10^{23}$ kg.*

statečnou přesností. Před vypuštěním kosmických sond byla jako jediná možnost měřit gravitační účinek na trajektorie ostatních planet. Ten ovšem klesá s druhou mocninou vzdálenosti, je proto malý a určení hmotnosti tedy nebylo snadné.

Gravitační síla mezi vnitřními planetami sluneční soustavy a případným měsícem je menší či řádově srovnatelná než ta od Slunce. To je i důvod, proč zejména Merkur, ale i Venuše své měsíce nemají. Jejich dráha by byla nestabilní. Gravitační síla mezi Měsícem a Sluncem ($4{,}4 \cdot 10^{20}$ N) je také větší než mezi Měsícem a Zemí ($2{,}0 \cdot 10^{20}$ N). Jak je tedy možné, že Země svůj měsíc má? Odpovědí na otázku je rychlost Měsíce. Kdyby se Měsíc nepohyboval, přitáhlo by si jej Slunce. Ve skutečnosti se však společně se Zemí pohybuje kolem Slunce. Ostatně i Země, kdyby byla v jednom okamžiku v klidu, by na Slunce spadla.

IV. úloha: Třetí Keplerův zákon použijeme pro odhad vzdálenosti Měsíce od Země. Vyjdeme z předpokladu, že gravitační zrychlení na zemském povrchu $g \sim 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ je závislé na poloměru Země R vztahem[9]

$$g = \frac{\varkappa \cdot M}{R^2}. \qquad (11)$$

Poloměr Země R byl s dostatečnou přesností určen řeckým geografem Eratosthenéem z Kyrény již v roce 250 př. n. l.: $R \sim 6\,400$ km[10]. Tím jsme schopni ze vztahu (11) vypočítat velikost $\varkappa \cdot M \sim 4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$.

Ze třetího Keplerova zákona (4) určíme vzdálenost a od Země k Měsíci

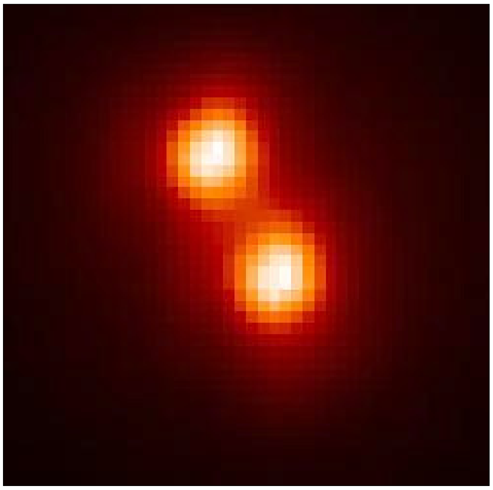
$$a^3 = \frac{\varkappa \cdot M}{4\pi^2} \cdot T^2, \qquad (12)$$

kde máme jako jedinou neznámou dobu oběhu T. Použijeme jeden měsíc ~ 30 dnů, což je $2{,}6 \cdot 10^6$ s. Po dosazení do (12) nám vyjde $a \sim 408\,000$ km. To je řádově přijatelná hodnota ve srovnání s velkou poloosou trajektorie Měsíce 384 tisíc km. Nutno podotknout, že staří Řekové sice měli všechny potřebné hodnoty pro výpočet vzdálenosti Měsíce, neznali ovšem Keplerovy zákony.

Obr. 4 – Země a Měsíc. Vzdálenosti těles nejsou v měřítku, rozměry ano. zdroj: http://www.kitguru.net/wp-content/uploads/2012/10/Earth-and-Moon.jpg

V. úloha: Pro výpočet hmotnosti Země ze znalosti vzdálenosti Měsíce a jeho oběžné doby již nemůžeme zanedbávat hmotnost Měsíce. Vypočítáme tedy součet hmotnosti Měsíce a Země. Velká poloosa Měsíce a je 384 tisíc km, siderická doba T je 27,322 dne. Ze vztahu (9) určíme $M + m$ o velikosti $6{,}011 \cdot 10^{24}$ kg. Hmotnost Země je $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg, z toho plyne, že hmotnost Měsíce je asi $4 \cdot 10^{22}$ kg, což představuje necelé 1 % hmotnosti Země[11].

VI. úloha: Pexeso k 50. výročí Evropské jižní observatoře (ESO) dostupné na `http://www.asu.cas.cz/pexeso` obsahuje ilustrační obrázek binární planetky (90) Antiope. Pozorování dalekohledem VLT (obr. 5) nám umožnilo rozlišit obě tělesa a určit jejich



Obr. 5 – binární planetka (90) Antiope na snímku VLT; zdroj: http://www.imcce.fr/en/observateur/campagnes_obs/antiope/index.php

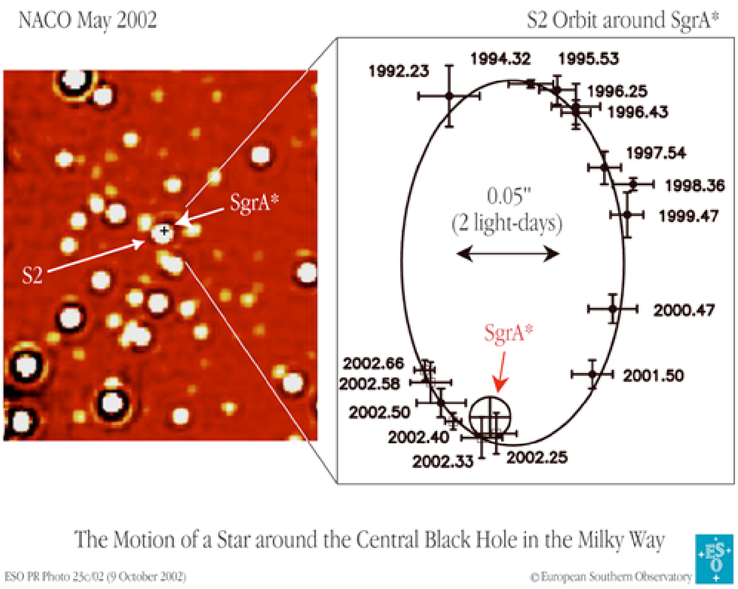
9 Odvozeným z Newtonova gravitačního a pohybového zákonu.

10 Stačilo stanovený obvod Země kolem poledníku přepočítaný na jednotky SI o velikosti 40 000 km vydělit 2π.

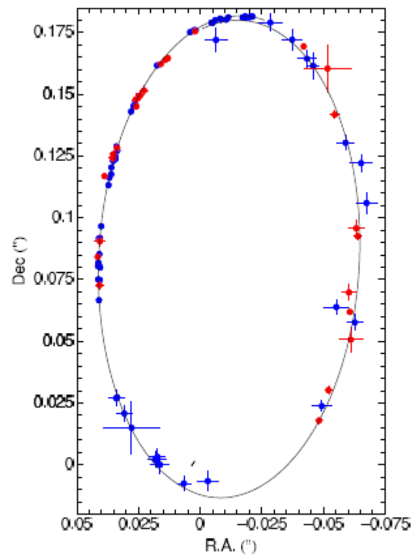
11 Skutečná hodnota je $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg.

parametry. Téměř stejně velká tělesa od sebe dělí 171 km a oběhnou se jednou za 16,5 h. Z těchto hodnot vypočítáme ze vztahu (9) hmotnost této soustavy, vyjde nám $8{,}4 \cdot 10^{17}$ kg. Jedno těleso má zhruba poloviční hmotnost, $4{,}2 \cdot 10^{17}$ kg.

VII. úloha: Platnost třetího Keplerova zákona v upřesněném tvaru (10) si vyzkoušíme i na objektu, který není ve sluneční soustavě. Jde o hvězdu, která se nachází v gravitačním poli černé díry o velké hmotnosti[12] v centru naší Galaxie. Pro zjednodušení zanedbáme relativistické efekty (dilatace času či stáčení pericentra v silném gravitačním poli) a dále budeme uvažovat vhodný sklon skutečné a pozorované trajektorie.



Obr. 6 – pohyb hvězdy okolo černé díry o velké hmotnosti v centru Galaxie (sklon roviny oběhu hvězdy je –48°); zdroj: http://www.eso.org/public/images/eso0226c/



Obr. 7 – úplná trajektorie hvězdy S2; zdroj: http://arxiv.org/pdf/0810.4674v1.pdf

Astronomové od roku 1992 pozorují v infračerveném a rádiovém oboru hvězdu S2 obíhající okolo rádiového zdroje Sgr A* (obr. 6), který se nachází v centru Galaxie. Zajímavá začala být hvězda S2 počátkem roku 2002, v první třetině roku se hvězda S2 nacházela v pericentru[13] a dosahovala rychlosti[14] okolo 7 000 km·s^{-1}. Svůj celý oběh dokončila hvězda S2 až v roce 2009 (obr. 7). Hmotnost centrálního tělesa bylo ale možné spočítat díky Keplerovým zákonům mnohem dříve. Tím můžeme stanovit charakter tohoto tělesa. V roce 2018 prolétne hvězda S2 opět pericentrem, to nám umožní další zpřesnění hmotnosti centrálního objektu. Kromě toho astronomové bedlivě sledují bližší hvězdu (ale 15krát slabší) s označením S102 (obr. 8 a 9), která má oběžnou dobu 11,5 let. V době psaní článku se jedná o hvězdu s nejkratší oběžnou dobou obíhající okolo černé díry o velké hmotnosti v centru Galaxie.

Pro výpočet hmotnosti centrálního tělesa potřebujeme znát hodnotu velké poloosy a a oběžné doby T. Z eliptické trajektorie hvězdy S2 lze určit[15], že a = 5,6 světelného dne (převedeme na astronomické jednotky, můžeme zadat žákům jako samostatnou úlohu[16], tj. 970 au) a T = 15,56 let.

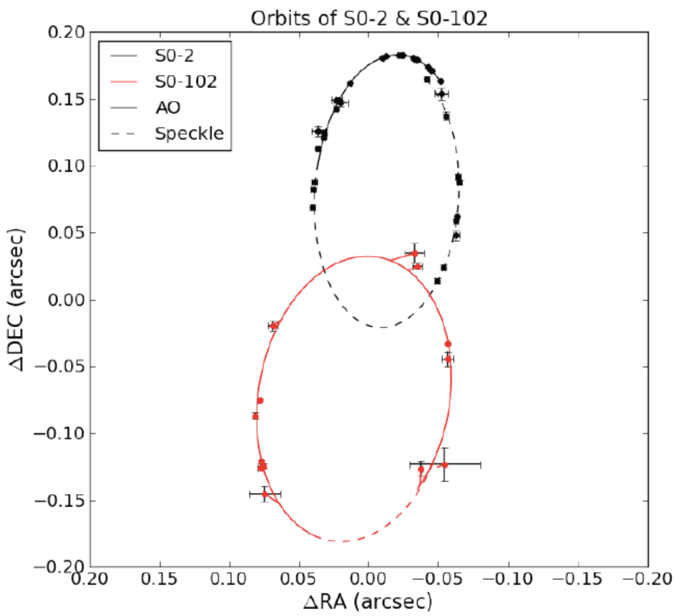
12 Běžně používaný pojem je supermasivní černá díra (z anglického Supermassive Black Hole), který obsahuje pojem masivní, což není používané a definované ve školní fyzice. Dalším označením může být černá veledíra, který nalezneme ve Žni objevů dr. Grygara. V tomto textu budeme používat černá díra o velké hmotnosti.

13 Pericentrum je nejbližší bod od hmotného středu soustavy dvou volně se pohybujících těles, která na sebe působí gravitačně.

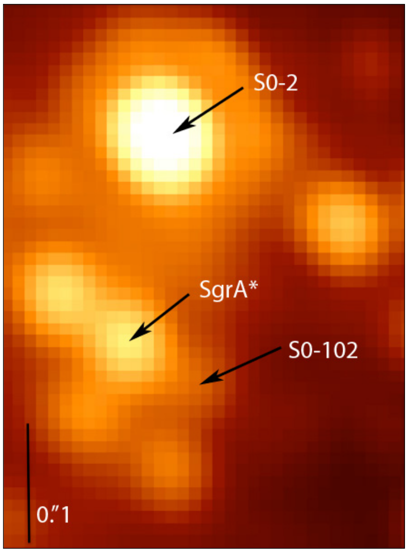
14 Pro srovnání uveďme, že Země obíhá okolo Slunce průměrnou rychlostí 30 km·s^{-1}, oběžná rychlost Slunce okolo středu Galaxie je 220 km·s^{-1}.

15 Určení by bylo nad rámec tohoto článku, lze najít v článku „Jakou hmotnost má černá díra uprostřed naší Galaxie?" Mgr. Křížka, prof. Křížka a Mgr. Ing. Šolce v časopisu Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, ročník 49 (2004), č. 2, str. 104–113. Dostupné online na http://dml.cz/dmlcz/141218

16 Za jeden den urazí světlo vzdálenost 300 000 000 m·s^{-1} · 86 400 s ~ $2{,}6 \cdot 10^{13}$ m ~ 170 au.



Obr. 8 – trajektorie hvězdy S2 (černě) a S102 (červeně); zdroj: http://arxiv.org/pdf/1210.1294v1.pdf



Obr. 9 – infračervený snímek hvězd S2 a S102; zdroj: http://arxiv.org/pdf/1210.1294v1.pdf

Po dosazení do (10) nám vyjde, že hmotnost objektu v centru naší Galaxie je $3{,}8 \cdot 10^6\ M_S = 7{,}5 \cdot 10^{36}$ kg. Dovedeme si představit, o jakou hmotnost se jedná?

Literatura

[1] DHILLON, Vik. *Newton's Derivation of Kepler's Laws* [online]. [citováno 19. 12. 2013]. Dostupné z <http://www.vikdhillon.staff.shef.ac.uk/teaching/phy105/celsphere/phy105_derivation.html>

[2] FREIRE, Alex. *Newton's derivation of Kepler's laws* [online]. [citováno 19. 12. 2013] Dostupné z <http://www.math.utk.edu/~freire/teaching/fall2006/m142f06NewtonKepler.pdf>

[3] KŘÍŽEK, Michal. Jakou hmotnost má černá díra uprostřed naší Galaxie? In *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, vol. 49 (2004), issue 2, pp. 104–113.

[4] *Multimediální učební text Astronomia* [online]. 2012, [citováno 5. 12. 2013]. Dostupné z <http://astronomia.zcu.cz>

[5] POGGE, Richard. Lecture 19: Orbits [online]. In *An Introduction to Solar System Astronomy.* [citováno 19. 12. 2013]. Dostupné z <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast161/Unit4/orbits.html>